

Soluciones numéricas en teorías clásicas de campos:
Vórtices y solitones
TRABAJO DE FIN DE GRADO

Gonzalo Contreras Aso

12 de junio de 2017



Abstract

The purpose of this Thesis is to explain the behaviour of the so called *vortices*, a special type of *solitons*, the former being solution of the 2D static Abelian Higgs model, the easiest of its kind. In order to fulfill our purpose, we will first have to make use of fundamental concepts in classical field theory and gauge theory, and later we will be interested in computing results corresponding to variations of the parameters involved in the model, for computing either the solutions to the dynamical equations or the energy contribution of these vortices.

Índice

1. Introducción	3
2. Teoría clásica de campos	4
2.1. Acción	4
2.2. Principio variacional	4
2.3. Tensor energía-momento	5
3. Vórtices de Nielsen-Olesen	5
3.1. Densidad Lagrangiana	5
3.2. Dinámica de los campos	6
3.3. <i>Ansatz</i>	7
3.4. Energía del sistema	8
3.5. Condiciones de contorno	9
4. Tratamiento numérico: Ecuaciones dinámicas	9
4.1. Maple	10
4.2. Fortran	11
5. Tratamiento numérico: Cálculos de energía	13
5.1. Densidad de energía y energía de los vórtices	13
5.2. Variación de la energía por vórtice	14
6. Conclusiones	15
7. Apéndice A: Gráficas	16
8. Apéndice B: Tensor energía-momento	20

1. Introducción

La motivación para el estudio de los vórtices a partir de teorías clásicas de campos surge con el comienzo de las teorías de cuerdas, en concreto este trabajo tiene su raíz en las cuerdas duales de Yoichiro Nambu [1], al final de la década de 1960, debido a la relación de similitud entre estas y las líneas de vórtices.

Esta relación fue inicialmente explorada por Holger. B. Nielsen y Poul Olesen [2], en el contexto de una teoría clásica de campos en su versión más sencilla, una teoría de Higgs abeliana, consistente en un campo gauge, acoplado a un campo escalar cargado, usada inicialmente por Higgs para explicar su mecanismo. Ajustando los parámetros del modelo se consigue que la anchura de la línea de vórtice sea mucho menor que el radio de curvatura, estableciendo así la analogía con las cuerdas duales.

Esta teoría, además, está relacionada con el modelo fenomenológico de Ginzburg-Landau para los superconductores tipo II (en los que aparecen fenómenos vorticiales, donde aparecen líneas de campo magnético entrando en el material por supercorrientes circulares de carga), ya que es una generalización relativista de estos. Esta analogía surge de la equivalencia entre el decaimiento exponencial del campo magnético y el mecanismo de Higgs. Además constituye una forma de contrastar experimentalmente los resultados, lo cual fue realizado por el premio Nobel Alexei A. Abrikosov [3] en 1957.

En este trabajo vamos a realizar un análisis numérico de las ecuaciones resultantes de la teoría. Las soluciones se corresponden con lo que matemáticamente se conoce por solitones, que son un análogo a las partículas, pero en teorías clásicas, es decir, sin cuantización. En nuestro caso vamos a reducir las soluciones al caso de soluciones estáticas y con simetría cilíndrica, lo que reduce las ecuaciones a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que la solución a estas ecuaciones no puede encontrarse en forma exacta.

En la sección 2 haremos un repaso de conceptos fundamentales de teoría clásica de campos que necesitaremos para manejar el modelo en cuestión.

En la sección 3 llevaremos a cabo un tratamiento puramente teórico de nuestro modelo, basándonos primero en los conceptos desarrollados en la sección anterior, para posteriormente introducir nuestras hipótesis obteniendo finalmente unas ecuaciones diferenciales.

En la sección 4 usaremos primero Maple y luego Fortran para resolver las ecuaciones y obtener así la dinámica de nuestros vórtices, variando los parámetros del modelo.

En la sección 5 finalmente realizaremos los cálculos de las energías correspondientes al modelo, y observaremos el fenómeno de ruptura espontánea de simetría inherente en la teoría.

2. Teoría clásica de campos

2.1. Acción

Nuestro estudio comienza en el terreno de las teorías clásicas de campos. Estas se caracterizan por una acción clásica de los campos involucrados, y al igual que en Mecánica Clásica ordinaria, se construye como la integral de un Lagrangiano L :

$$S = \int dt L(q_i, \dot{q}_i, t) \quad (1)$$

donde q_i son las coordenadas generalizadas.

La diferencia al estudiar campos radica en que los campos se “extienden” por todo el espacio y no solo por el tiempo, como por ejemplo en el caso de partículas puntuales, de modo que el Lagrangiano será a su vez la integral de una cierta densidad Lagrangiana (que se abrevia como simplemente “Lagrangiana”) \mathcal{L} , dependiente de los campos (Φ_i), sus derivadas ($\partial\Phi_i$), y las coordenadas espaciotemporales (\mathbf{x}):

$$L = \int d\vec{x} \sqrt{-g} \mathcal{L}(\Phi_i, \partial\Phi_i, \vec{x}, t) \longrightarrow S = \int d\mathbf{x} \sqrt{-g} \mathcal{L}(\Phi_i, \partial\Phi_i, \mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, N \quad (2)$$

El factor $\sqrt{-g}$, donde g es el determinante de nuestra métrica espaciotemporal¹, aparece para conservar la covariancia de nuestra acción. Se suele obviar ya que es irrelevante si trabajamos en coordenadas cartesianas en un espaciotiempo plano, pero si por el contrario trabajamos con espaciotiempos curvos y/o coordenadas curvilíneas (como por ejemplo polares, que usaremos más adelante), será relevante.

2.2. Principio variacional

La dinámica de estos campos vendrá dada por el principio variacional, el mismo que en Mecánica Clásica, que establece que las ecuaciones clásicas de los campos son aquellas que dejan la acción estacionaria, $\delta S = 0$.

Efectuando variaciones sobre la acción, y exigiendo que estas variaciones se anulen en la frontera, junto con el principio variacional, se obtienen las ecuaciones dinámicas de los campos; estas son las llamadas ecuaciones de Euler-Lagrange, y hay una ecuación por cada campo fundamentales involucrado en el sistema:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Phi_i} = 0 \quad (3)$$

Podemos hacer la sustitución $L = \sqrt{-g}\mathcal{L}$, y ya que en (casi) todo el trabajo nuestra métrica es la métrica de Minkowski en 2+1 dimensiones, será idéntico trabajar con la Lagrangiana que con el Lagrangiano (salvo cuando usemos coordenadas polares, habrá un factor r extra).

¹La signatura que usaremos para nuestra métrica tendrá signo negativo para la parte temporal

La dinámica de los campos vendrá dada por tanto por la Lagrangiana, que a su vez depende de la teoría en la que estemos trabajando. En general, nos interesará construir Lagrangianas que sean invariantes bajo transformaciones de Lorentz, de lo contrario perdería el sentido físico nuestra teoría.

Cabe destacar un tipo de término de las Lagrangianas, el término cinético (aquel que contiene derivadas de los campos fundamentales, al cuadrado), cuyas ecuaciones, con (3), proporcionan la dinámica de los campos libres, sin interacción.

2.3. Tensor energía-momento

El tensor energía-momento de una teoría es un tensor de segundo orden, cuyas componentes definen el contenido energético del sistema en cuestión.

Va a venir dado por la siguiente ecuación (cuya explicación somera se puede encontrar en el “Apéndice B”):

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial L}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial(\sqrt{-g} \mathcal{L})}{\partial g_{\mu\nu}} \quad (4)$$

Para operar esto hasta obtener una expresión más manejable necesitaremos las siguientes identidades:

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu}; \quad \frac{\partial g}{\partial g_{\mu\nu}} = g g^{\mu\nu}; \quad \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu}$$

Por tanto, usando la regla de Leibniz en (4) y aplicando las identidades obtenemos:

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \mathcal{L} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{2}{\sqrt{-g}} \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} + g^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (5)$$

Esto será útil cuando queramos obtener la energía del sistema, e incluso aplicar condiciones de frontera sobre ella.

3. Vórtices de Nielsen-Olesen

3.1. Densidad Lagrangiana

Nos vamos a centrar en una teoría de Maxwell-Higgs (por tanto, que involucra tanto el campo vectorial electromagnético como un campo escalar complejo) en 2+1 dimensiones, con un potencial. Su Lagrangiana correspondiente será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - V(\phi) \quad (6)$$

Los campos fundamentales son los previamente mencionados, el campo escalar complejo ϕ , y el campo gauge electromagnético A_μ . Los dos campos están acoplados mediante el “acoplo

mínimo”, es decir, introduciendo la derivada covariante D_μ , cuya conexión es el campo gauge A_μ , de la forma: $D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu$, de forma que, sabiendo esto, si desarrollamos el segundo término de la Lagrangiana obtenemos:

$$(D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi^* + iA_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi - iA^\mu\phi) = (\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)^* + A^2\phi^2 - iA_\mu[\phi(\partial^\mu\phi^*) - \phi^*(\partial^\mu\phi)]$$

El primero de los términos, al ser una derivada al cuadrado del campo constituye su término cinético, mientras que el resto da cuenta del acoplo entre ambos campos, y estará relacionado con la “corriente” que definiremos en analogía a las ecuaciones de Maxwell en la siguiente sección.

El término cinético del campo gauge viene dado por el tensor de curvatura del campo electromagnético $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, en la combinación dada por el primer sumando de la Lagrangiana (6), construido de manera que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz.

El potencial que vamos a usar va a ser el siguiente:

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{8}(|\phi|^2 - 1)^2 = \frac{\lambda}{8}(\phi\phi^* - 1)^2$$

donde $\lambda > 0$ es la constante de acoplo de Higgs (en el caso de superconductividad, es lo que se conoce por la longitud de penetración en el material), que va a ser uno de los parámetros que tendremos que variar cuando computemos los resultados. Este potencial está escogido de esta manera por ser de los más simples que nos proporcionan las condiciones requeridas (que se obtengan estados ligados, que sea definido positivo, energía finita, etc).

3.2. Dinámica de los campos

Pasamos ahora a la dinámica de los campos fundamentales, A_μ, ϕ, ϕ^* . Para ello recurrimos a las ecuaciones de Euler-Lagrange (3), empezando por el caso del campo gauge:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0$$

Efectuando el cálculo correspondiente, llegamos a la primera de las ecuaciones dinámicas:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu \tag{7}$$

Esta ecuación nos es familiar, es análoga a las dos ecuaciones de Maxwell correspondientes a las fuentes de campo electromagnético, con la diferencia de que en este caso nuestra densidad de corriente j^μ será:

$$j^\mu = \frac{i}{2} [\phi^*(D^\mu\phi) - \phi(D^\mu\phi)^*]$$

Para el caso de los campos ϕ y ϕ^* , sabemos que la Lagrangiana es real, por tanto hallando la ecuación dinámica de uno de ambos campos, y conjugándola, obtendremos la del otro campo. La ecuación para el campo ϕ será:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu\phi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0$$

De nuevo, efectuando este cálculo, y teniendo en cuenta la anterior consideración, llegamos a las dos ecuaciones dinámicas restantes:

$$(D_\nu(D^\nu\phi))^* + \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi^* = 0 \quad (8)$$

$$D_\nu(D^\nu\phi) + \frac{\lambda}{2}(|\phi|^2 - 1)\phi = 0 \quad (9)$$

Aunque ambas ecuaciones son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, solo una de las dos aporta información, la otra es redundante, por tanto las ecuaciones con las que vamos a trabajar serán la primera de estas (8), y la ecuación de A_μ (7)

3.3. *Ansatz*

Las ecuaciones dinámicas (7) y (8) son ecuaciones que describen vórtices. Su resolución es complicada, dado que son ecuaciones hiperbólicas, de modo que vamos a estudiar un caso particular. Nuestro “ansatz”, es decir, nuestra hipótesis, será considerar simetría de revolución, y estaticidad, que no dependa del tiempo.

De esta forma, vamos a pasar a coordenadas polares (r, θ) y a expresar los campos fundamentales en función de a y f , ambas reales y dependientes de la coordenada radial:

$$\begin{cases} A_i = -\frac{a(r)}{r^2}\epsilon_{ij}x^j \\ \phi = f(r)e^{in\theta} \end{cases}$$

donde ϵ_{ij} es el símbolo de Levi-Civita, y el número n es lo que se conoce en topología como el *winding number*, el “índice topológico”, es un número entero relacionado en nuestro caso con la vorticidad del sistema, y será, junto con λ , un parámetro a variar en nuestro modelo.

El cambio a polares vendrá dado por:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{x^2}{x^1}\right) \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x^1 &= r \cos \theta \\ x^2 &= r \sin \theta \end{aligned}$$

Sustituyendo esto obtenemos:

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{a(r)}{r} \sin \theta \\ A_2 = \frac{a(r)}{r} \cos \theta \\ \phi = f(r) \cos(n\theta) + if(r) \sin(n\theta) \end{cases}$$

Si utilizamos este “ansatz” en nuestras ecuaciones dinámicas, y operamos, habremos reducido nuestro sistema de ecuaciones en derivadas parciales a las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$a'' - \frac{1}{r}a' + f^2(n - a) = 0 \quad (10)$$

$$f'' + \frac{1}{r}f' - \frac{(n - a)^2}{r^2}f = \frac{\lambda}{2}(f^2 - 1)f \quad (11)$$

Cabe destacar que la sustitución anterior podía haberse realizado en la Lagrangiana directamente, y posteriormente realizar variaciones respecto a las funciones radiales a y f . En este caso el resultado sería el mismo, ya que trabajamos con una Lagrangiana abeliana, pero en el caso general (no abeliano) sí que es necesario proceder de la forma que hemos usado aquí, ya que de lo contrario podrían faltar términos en la solución.

3.4. Energía del sistema

Nuestro siguiente paso será obtener una expresión para la energía de nuestro sistema. Para ello, vamos a usar la ecuación (5) aplicada a nuestra Lagrangiana. Si operamos, obtendremos el siguiente resultado:

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\rho F^{\nu\rho} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + (D^\mu\phi)^*(D^\nu\phi) - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}(D_\alpha\phi)^*(D^\alpha\phi) - g^{\mu\nu}V \quad (12)$$

Del tensor energía-momento, sabemos que la densidad de energía es la componente (00) del tensor (con el signo cambiado por la signatura de nuestra métrica), $\varepsilon = -T_{00}$. Utilizando nuestro *ansatz* (la estaticidad elimina los términos con derivadas respecto al tiempo, y las únicas componentes espaciales son en 2 dimensiones), llegamos al siguiente resultado:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}F_{12}^2 + \frac{1}{2}(|D_1\phi|^2 + |D_2\phi|^2) + V \quad (13)$$

Ahora bien, esto es la densidad de energía, para obtener la energía total del sistema tendremos que integrarlo:

$$E = \int d^2x \varepsilon \sqrt{-g} \quad (14)$$

Si sustituimos (13) en esta ecuación, junto con el cambio $(A_\mu, \phi) \rightarrow (a, f)$, teniendo en cuenta que el cambio a polares nos proporciona un determinante de la métrica que no es la unidad, y por tanto $\sqrt{-g} = r$; e integramos trivialmente sobre el ángulo polar, obtenemos:

$$E = 2\pi \int_0^\infty \left[\frac{(a')^2}{2r} + \frac{r}{2}(f')^2 + \frac{1}{2r}(n - a)^2 f^2 + \frac{\lambda}{8}r(f^2 - 1)^2 \right] dr \quad (15)$$

3.5. Condiciones de contorno

A la hora de integrar numéricamente las ecuaciones, vamos a necesitar proporcionarle al programa unas condiciones de contorno. Como tenemos un sistema de dos ecuaciones dinámicas de segundo orden en a y f , necesitamos un mínimo de cuatro condiciones. Estas las vamos a obtener gracias a que imponemos que la energía tenga un carácter finito. Vamos a imponer condiciones en $r = 0$ y $r = \infty$, de forma que las funciones a y f y sus derivadas anulan en esos extremos divergencias en la energía:

$$r = 0 \begin{cases} a'|_{r=0} = 0 \\ f|_{r=0} = 0 \quad \text{y/o} \quad (n-a)|_{r=0} = 0 \end{cases}$$

$$r = \infty \begin{cases} a'|_{r=\infty} = 0 \\ f'|_{r=\infty} = 0 \\ f|_{r=\infty} = 0 \quad \text{y/o} \quad (n-a)|_{r=\infty} = 0 \\ f^2|_{r=\infty} = 1 \Rightarrow f|_{r=\infty} = \pm 1 \end{cases}$$

De todas estas condiciones, algunas son redundantes entre sí de modo que nos vamos a quedar con las 4 más relevantes y computacionalmente robustas:

$$a'|_{r=0} = 0, \quad f|_{r=0} = 0, \quad (n-a)|_{r=\infty} = 0, \quad f|_{r=\infty} = 1 \quad (16)$$

Vamos a realizar una última hipótesis sobre ambas funciones, para facilitar su cálculo, que va a ser pedir que ambas admitan un desarrollo en serie de Taylor entorno a $r = 0$. Introduciendo estos desarrollos en las ecuaciones, obtenemos la expresión a órdenes bajos de las funciones a, f :

$$a(r) = a_2 r^2 - \frac{f_n^2 r^{2n+2}}{4n+4} + \dots$$

$$f(r) = f_n r^n - \frac{f_n (4na_2 + \lambda) r^{n+2}}{8n+8} + \dots$$

Aquí acaba la parte teórica del trabajo, ahora comienza la parte computacional, utilizando los resultados obtenidos hasta el momento.

4. Tratamiento numérico: Ecuaciones dinámicas

Para continuar nuestro estudio hemos de pasar a cálculos computacionales. Vamos a resumir el proceso a seguir, para en las secciones siguientes detallarlo. Primero vamos a introducir nuestras ecuaciones dinámicas (10),(11) junto con las condiciones de contorno (16) en el programa Maple. Las manipularemos para hacerlas tratables en Fortran, y una vez conseguido, usaremos un integrador numérico de EDOs, COLSYS, para obtener los resultados que buscamos. El proceso a seguir queda esquematizado en la siguiente imagen:

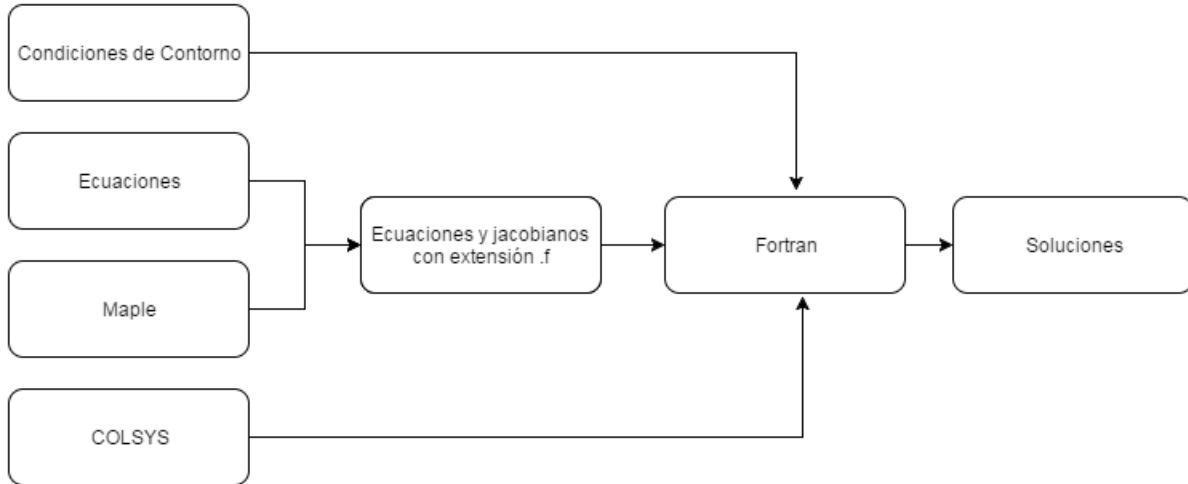


Figura 1: Esquema del proceso a seguir

4.1. Maple

Comenzamos utilizando el software de cálculo simbólico Maple. Vamos a seguir un procedimiento necesario para hacer tratables las ecuaciones por COLSYS; no vamos a detallar el código entero, pero sí resumir los pasos a seguir.

Comenzamos introduciendo en las ecuaciones en el programa. Vamos ahora a imponer que nuestras funciones a , y f admitan una expansión como series de Taylor centradas en $r = 0$. Los coeficientes de la expansión los podremos relacionar introduciendo las series en las ecuaciones, y exigiendo que las cumplan.

El siguiente paso será “compactificar” la coordenada r . Hemos de tener en cuenta que para un ordenador, tratar el “infinito” numéricamente no es una tarea trivial, así que para obtener resultados cuando $r \rightarrow \infty$, podemos o bien usar un número arbitrariamente grande (lo cual es bastante poco riguroso), o bien compactificar, que consiste en hacer un cambio de coordenadas tal que nos mantenga el origen, y el infinito nos lo lleve a, por simplicidad, el 1. Este cambio viene dado por:

$$r = \frac{x}{1-x} \rightarrow x = \frac{r}{1+r}; \quad \lim_{r \rightarrow 0} x = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} x = 1$$

Implementando este cambio en Maple, obtenemos las siguientes expresiones para las ecuaciones dinámicas:

$$0 = (1-x)^4 \frac{d^2}{dx^2} a(x) - 2(1-x)^3 \frac{d}{dx} a(x) + \frac{-(1-x)^3 \frac{d}{dx} a(x) + (f(x))^2 nx - a(x)(f(x))^2 x}{x} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
0 = & (1-x)^4 \frac{d^2}{dx^2} f(x) - 2(1-x)^3 \frac{d}{dx} f(x) \\
& -1/2 \frac{-2x(1-x)^3 \frac{d}{dx} f(x) + 2f(x)n^2(1-x)^2 - 4f(x)na(x)(1-x)^2}{x^2} \\
& -1/2 \frac{2(a(x))^2 f(x)(1-x)^2 + x^2 \lambda (f(x))^3 - x^2 \lambda f(x)}{x^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

Los desarrollos de a, f introducidos en las ecuaciones quedarían así:

$$a(x) = a_2 x^2 + 2a_2 x^3 + O(x^4), \quad f(x) = f_n x^n + n f_n x^{n+1} + O(x^{n+2}) \tag{19}$$

Llegados a este punto, podemos hacer la siguiente reparametrización:

$$a(x) = \frac{A(x)}{x^2}, \quad f(x) = \frac{F(x)}{x^n}$$

Esto resulta útil en los casos en los que $x = 0$ es un punto singular regular del sistema, de forma que extraemos el comportamiento inicial de la función al reparametrizar. Además esto consigue que nuestra solución sea más robusta, ya que podremos poner condiciones de contorno no solo para a, f, a', f' si no también para A, F, A', F' .

Ahora llega el momento de exportar a COLSYS. Para ello, primero tenemos que introducir los desarrollos en las ecuaciones (17) y (18). Lo siguiente es renombrar las funciones que tenemos:

$$A'' = f_1, \quad F'' = f_2, \quad A = z_1, \quad A' = z_2, \quad F = z_3, \quad F' = z_4$$

Lo que necesitamos introducirle al programa es

1. Ecuaciones: Despejamos de ambas ecuaciones f_1 y f_2 (las segundas derivadas de A y F), y las exportamos como código para Fortran (extensión “.f”).
2. Jacobianos: COLSYS necesita además los jacobianos:

$$\begin{aligned}
J_{11} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_1}, & J_{12} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_2}, & J_{13} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_3}, & J_{14} &= \frac{\partial f_1}{\partial z_4} \\
J_{21} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_1}, & J_{22} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_2}, & J_{23} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_3}, & J_{24} &= \frac{\partial f_2}{\partial z_4}
\end{aligned}$$

Que una vez calculados, de nuevo los exportamos a Fortran con extensión “.f”.

Hasta aquí finaliza la primera parte de Maple.

4.2. Fortran

Para finalmente obtener resultados, usaremos un programa escrito en Fortran. Este programa, al compilarlo “llama” a tres objetos (archivos “.o” generados al compilar los archivos

originales): el programa COLSYS, las ecuaciones, y los jacobianos. Por tanto necesitamos compilar primero los tres ficheros. Los archivos generados por Maple de las ecuaciones y jacobianos tenemos que modificarlos, ya que no contienen todavía el código necesario para que puedan ser compilados, hay que añadirles “cabeceras” que especifican qué tipo de programa serán (en nuestro caso subrutinas del programa principal), qué variables aportan, etc.

Con el de COLSYS no tenemos problema, dado que es un fichero ya preparado por sus creadores, U. Ascher, J. Christiansen, R. D. Russell [4], para ser compilado. Su funcionamiento consiste en la colocación de una serie de mallados que permite, por el método de Newton, obtener la solución, minimizando el error, hasta obtener una solución cuyo error está por debajo de nuestra tolerancia.

El proceso es el siguiente: Compilamos los archivos de COLSYS, ecuaciones y jacobianos (con sus cabeceras correspondientes), obteniendo sus archivos objeto. Compilamos ahora el programa principal (*program_initial.f*) con estos objetos. Este programa contiene las condiciones iniciales impuestas en el sistema, y, además, llamará a un archivo que contiene los parámetros (definidos por el usuario) n , λ y la tolerancia de la solución (*initial.data*), y hará uso de una solución preestablecida para sacar un archivo ejecutable (*program_initial*). Este archivo, al ejecutarlo, nos crea dos archivos nuevos: un archivo con los datos de la solución (*result.data*) y otro con los datos pero preparados para ser representados (*result.plot*).

Con esta solución, lo que hacemos para asegurarnos de que sea un buen ajuste es volver a usar un programa (*program_rerun.f*), idéntico a *program_initial.f*, compilándolo y ejecutándolo, pero esta vez el programa no coge una solución inicial preestablecida, sino que coge la solución obtenida previamente como solución inicial.

En resumen, tenemos el siguiente gráfico:

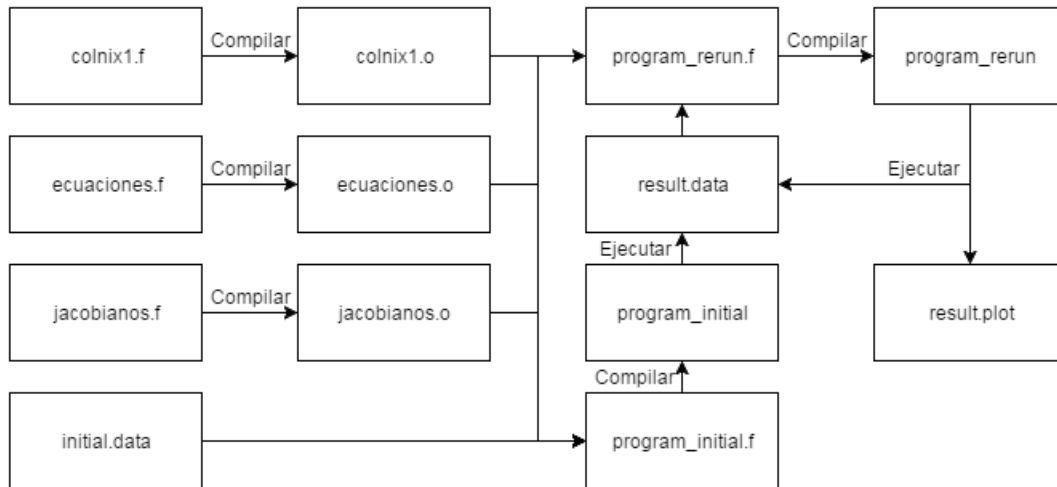


Figura 2: Esquema del proceso de compilación de los resultados.

Ahora que ya hemos visto cómo funciona la parte de Fortran, vamos a representar los

resultados correspondientes a diferentes valores de los parámetros λ (constante de acoplo de Higgs) y n (vorticidad), y usando una tolerancia fija de 10^{-8} :

- **Función radial $a(r)$ para distintos valores de los parámetros:** Primero vamos a considerar las soluciones de la función $a(r)$ para una valor de $n = 1$ fijo, con distintos valores de λ . El resultado que obtenemos es el siguiente:

Véase “Apéndice A: Figura 4”

Podemos ver que todas las soluciones parten de 0 en el origen y tienden a $a = 1$ en el infinito (en la gráfica ya lo alcanza incluso a partir de $r \simeq 8$), que es lo que sabíamos que debía pasar dadas nuestras condiciones de contorno.

Ahora vamos a repetir el resultado, variando esta vez n en lugar de λ , fijo en 1.

Véase “Apéndice A: Figura 5”

De nuevo vemos que se cumplen las condiciones de contorno, en este caso la diferencia es que cada solución con n diferente tiende a su n correspondiente en el infinito.

- **Función radial $f(r)$ para distintos valores de los parámetros:** Repetiremos el apartado anterior, esta vez para la función $f(r)$. Variando primero λ y fijando $n = 1$, y luego al revés, obtenemos dos gráficas:

Véanse “Apéndice A: Figura 6” y “Apéndice A: Figura 7”

De nuevo podemos ver que en ambos casos las condiciones de contorno impuestas sobre la función f se cumplen, partiendo del origen y alcanzando el valor 1 en el infinito.

También se puede ver que para valores crecientes de λ la función se aproxima cada vez más a una función paso de Heavyside.

En cualquiera de ambos casos, las funciones radiales que hemos obtenido son monótonamente crecientes, y no presentan ninguna discontinuidad, lo cual tiene sentido físicamente.

Realmente estas gráficas nos sirven para comprobar que vamos a tener soluciones regulares para ambas funciones, pero lo que físicamente nos interesa no son ambas funciones, sino la energía que tiene nuestro sistema, para lo cual las necesitamos.

5. Tratamiento numérico: Cálculos de energía

5.1. Densidad de energía y energía de los vórtices

En esta sección trataremos de obtener resultados para la energía de distintas configuraciones, de nuevo variando los parámetros λ y n , y obtendremos además los valores para los que serán más energéticamente favorables los vórtices.

De nuevo, vamos a utilizar Fortran para compilar un programa, *energy.f*, el cual partiendo de las soluciones obtenidas previamente para a, a', f, f' , obtiene la densidad de energía $\varepsilon(r)$, y la energía total E , ambas a través de la ecuación (15). De nuevo variaremos primero el parámetro λ con $n = 1$ fijo, y más tarde al revés, obteniendo las siguientes gráficas:

Véanse “Apéndice A: Figura 8” y “Apéndice A: Figura 9”

Para el caso de $n = 1$, la energía tiene un máximo de densidad en el centro del vórtice, sin embargo para vorticidades mayores los máximos de energía se encuentran más alejados.

También se observa que si aumentamos la constante de Higgs λ la energía aumenta.

5.2. Variación de la energía por vórtice

Para finalizar vamos a hacer una análisis que nos llevará a encontrar un fenómeno de ruptura de simetría en el sistema, que es el que da lugar al estado superconductor. Para ello, vamos a usar un programa, *loop_program.f*, que contiene instrucciones para iterar un número arbitrario de veces los programas anteriormente mencionados (*program_rerun.f* y *energy.f*), variando con cada iteración el parámetro λ una cierta cantidad $\Delta\lambda$. Haremos esto para varios valores de n , y con un $\Delta\lambda = 0,01$, y con ello obtendremos la siguiente gráfica:

Véase “Apéndice A: Figura 10”

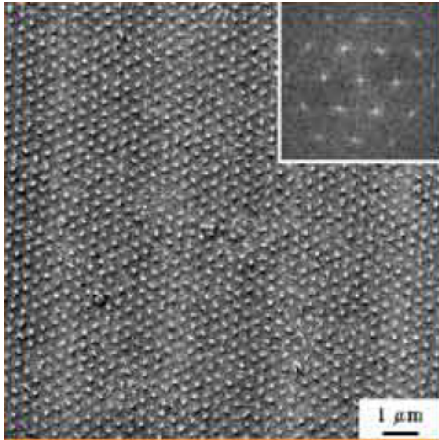


Figura 3: Fotografía de un cristal de MgB_2 superconductor (tipo II) sometido a un campo $H=200$ Oe. (Vinnikov et al., Phys. Rev. B 67, 092512)

Como se puede observar perfectamente, para el valor de $\lambda = 1$ nos encontramos con una transición de fase, y no nos encontramos cambio al cambiar n . Para valores inferiores de λ , al sistema le es energéticamente más favorable tener un vórtice con mayor vorticidad, mientras que para valores mayores de λ ocurre lo contrario, al sistema le es más favorable tener vortices con menor vorticidad. Esto lo interpretaron (y demostraron) Laurence Jacobs y Claudio Rebbi [5] como dos estados del sistema; en la primera (para $\lambda < 1$) sería más estable tener un vórtice con mayor vorticidad que varios con menor, por tanto hay una especie de “atracción” entre vórtices, y al contrario para $\lambda > 1$, en cuyo caso como es más estable tener varios vórtices de menor vorticidad, lo que se interpreta como “repulsión” entre ellos.

Esta transición de fase es la que da lugar al estado superconductor del sistema, que se

da para $\lambda > 1$. De hecho, concuerda con el anterior análisis, en referencia a la repulsión entre vórtices y a tener varios en lugar de uno con mucha vorticidad, ya que este hecho se ha observado (Figura 3) anteriormente.

6. Conclusiones

En este trabajo hemos visto ligeramente cómo las disciplinas de la Física Teórica (con el desarrollo de la teorías clásicas de campos, aparentemente abstractas, en especial en modelos como el estudiado) y la Física Experimental (en nuestro caso los modelos de Ginzburg-Landau y posteriormente el de Abrikosov, cuyas ecuaciones eran puramente fenomenológicas) están íntimamente relacionadas, y pueden usarse la primera como justificación de la segunda, y la segunda como comprobación de la primera, beneficiándose mutuamente.

En nuestro modelo, al igual que en muchos otros, hemos comprobado que las herramientas que nos proporciona la teoría clásica de campos nos permiten alcanzar resultados que de otra forma serían difícilmente obtenibles, desde ecuaciones de movimiento hasta cálculos de energías del sistema.

Además, vemos como el tratamiento numérico del problema se hace imprescindible cuando llegamos a un punto en nuestro problema en el que las herramientas analíticas son desconocidas o incluso inexistentes, y por tanto, una continuación exacta no es posible. En el paradigma actual de la Física, la necesidad de estas técnicas en todas las ramas de la Física (además del resto de ciencias) conlleva que estén bastante avanzadas, y por tanto se ha desarrollado todo tipo de software destinado a la resolución numérica de ecuaciones y sistemas, como el usado en este trabajo.

Los resultados que hemos obtenido nos ayudan a comprender la relación entre los distintos parámetros involucrados en el modelo y las propiedades físicas de este, concretamente la energía del vórtice, y nos predice fenómenos observables como las propiedades vorticiales de la superconductividad tipo II.

Estas propiedades, obtenidas mediante métodos los métodos teóricos y numéricos previamente mencionados, han sido contrastadas en experimentos, consolidando así la validez del modelo de vórtices desarrollado en la década de 1960, al menos en el ámbito superconductor, con el que se observa un cambio significativo entre dos fases, la fase normal y la fase superconductora, en la cual los vórtices tienden a repelerse para minimizar la energía.

En un contexto más teórico, estos vórtices son casos particulares de solitones, que son una de las primeras y más fáciles soluciones que surgen en la teorías de cuerdas, tal y como exploró Nambu, y actualmente se trabaja en su extensión como explicación de las “cuerdas cósmicas” (cosmic strings), de forma que entenderlos en su forma más sencilla se hace necesaria para poder extender los conceptos los conceptos más abstractos y complejos.

7. Apéndice A: Gráficas

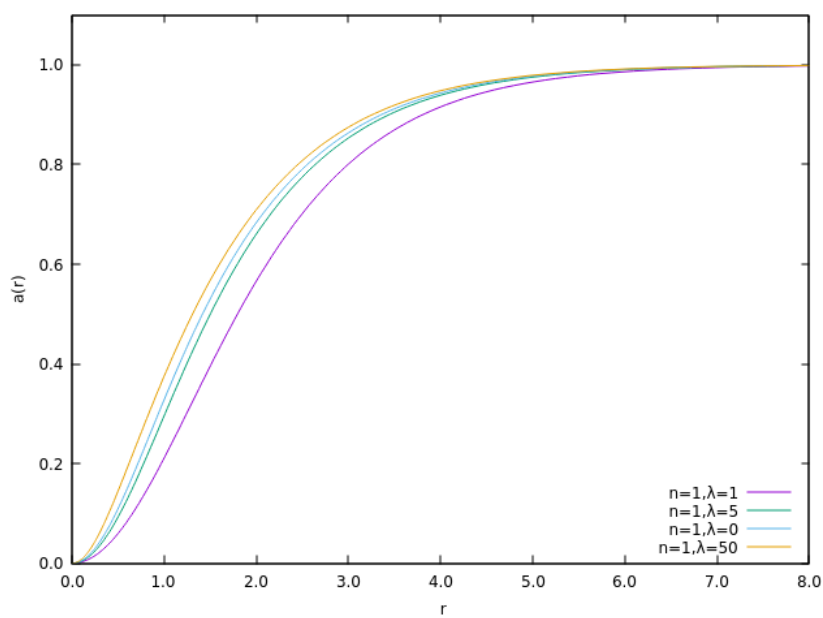


Figura 4: Función radial a para distintos valores de λ y $n = 1$.

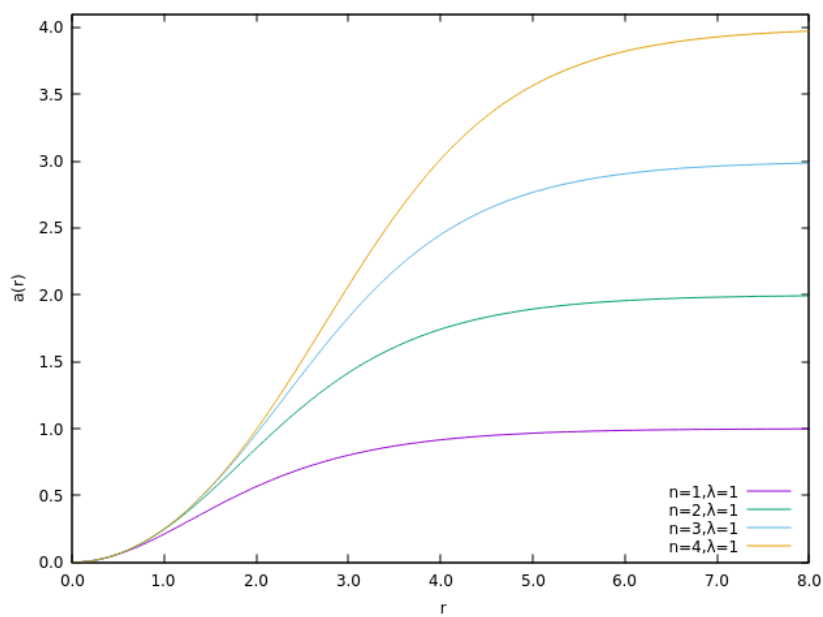


Figura 5: Función radial a para distintos valores de n y $\lambda = 1$.

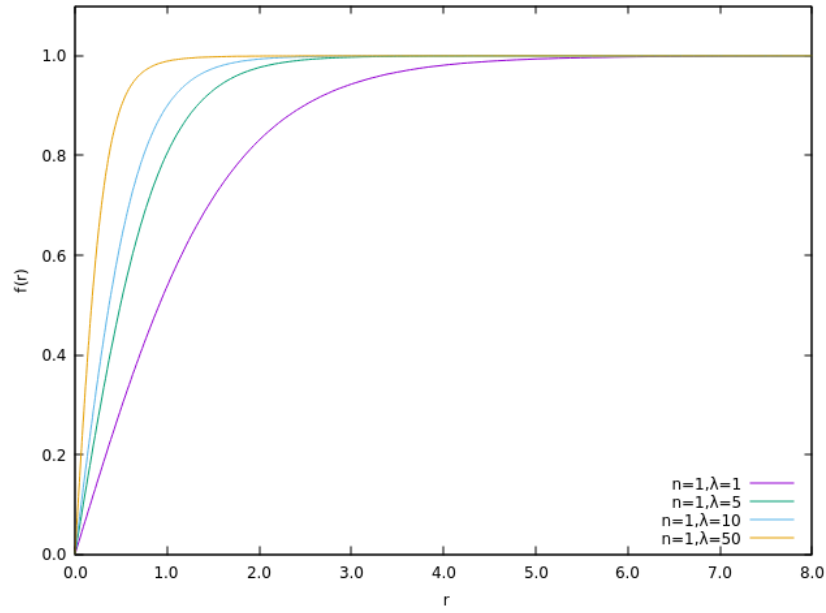


Figura 6: Función radial f para distintos valores de λ y $n = 1$.

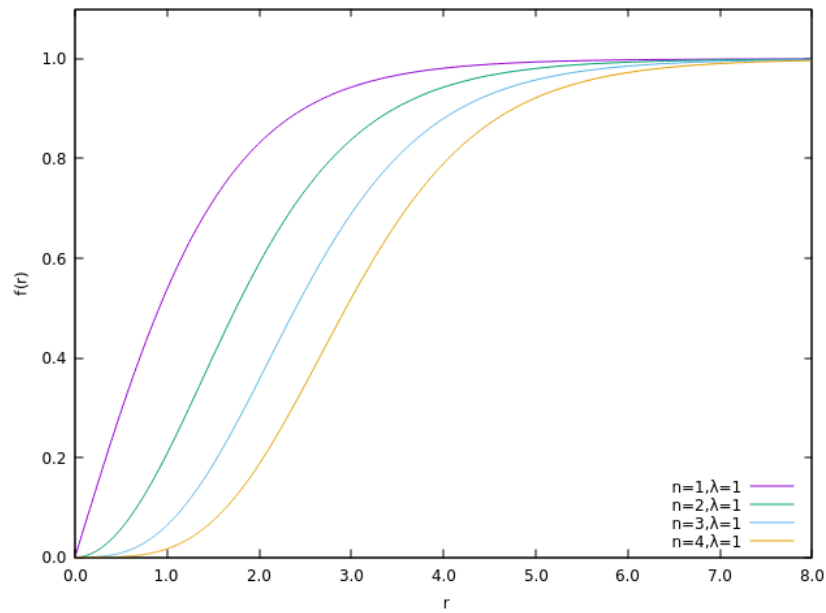


Figura 7: Función radial f para distintos valores de n y $\lambda = 1$.

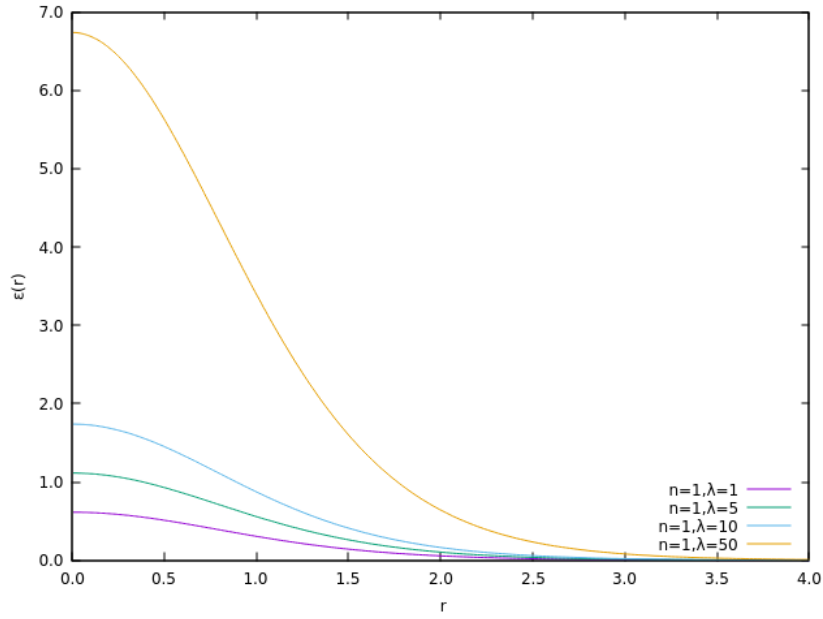


Figura 8: Densidad de energía ϵ para distintos valores de λ y $n = 1$.

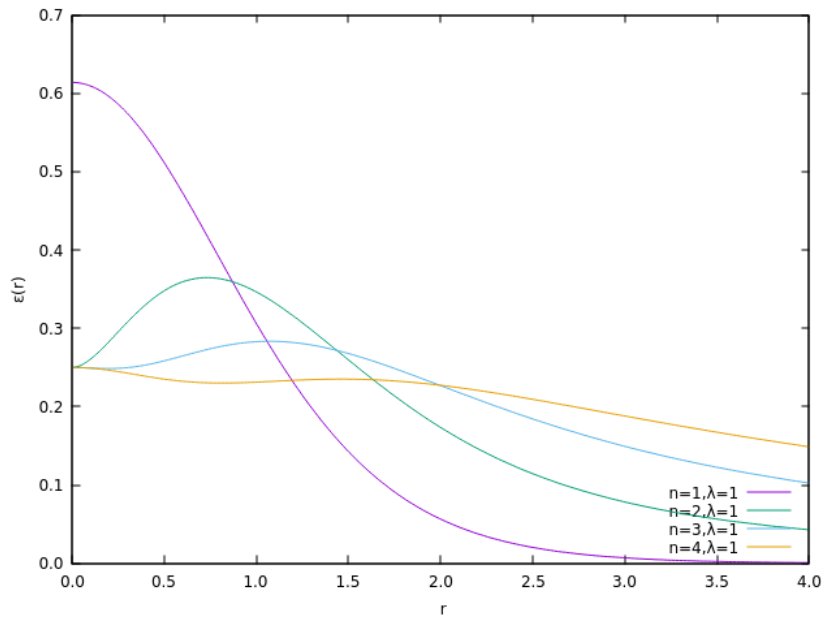


Figura 9: Densidad de energía ϵ para distintos valores de n y $\lambda = 1$.

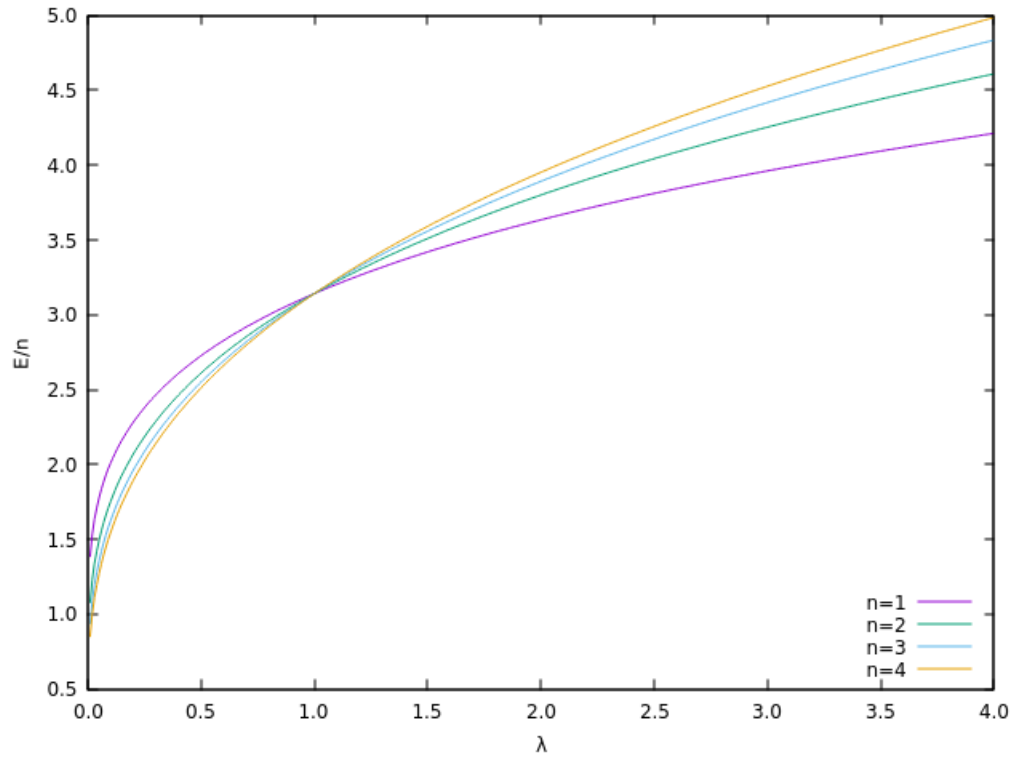


Figura 10: Energía en función de λ para distintas vorticidades

8. Apéndice B: Tensor energía-momento

El tensor energía-momento (4) tiene su origen en la Relatividad General. La Lagrangiana de esta teoría es, sin entrar en gran detalle, el siguiente:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{materia} + \mathcal{L}_{curvatura}$$

En este caso, tenemos un campo fundamental sobre el que tomar variaciones, que es la métrica $g_{\mu\nu}$, con sus correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha g_{\mu\nu})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = 0$$

Efectuando este cálculo, cuya dificultad está totalmente fuera del nivel de este trabajo, se obtienen las ecuaciones de Einstein del campo gravitatorio:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

La parte izquierda de la ecuación, es decir, el tensor de Einstein, aparece de las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre la parte de curvatura de la Lagrangiana. La parte derecha, proporcional al tensor energía-momento, aparece, salvo constantes, al hacer lo propio sobre la parte de materia de la Lagrangiana.

Como nuestra teoría es una teoría no acoplada a la gravedad, solo tenemos la Lagrangiana de materia, y por tanto podemos usar esa expresión para obtener el tensor energía-momento, obteniendo finalmente la ecuación 4.

Referencias

- [1] Y. Nambu, *Lectures at the Copenhagen Summer Symposium*, 1970;
- [2] H. B. Nielsen, P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B. **61** 45-61 (1973);
- [3] A. A. Abrikosov, *On the Magnetic Properties of Superconductors of the Second Group*, Soviet Physics JETP **5**, 1174 (1957);
- [4] U. Asher, J. Christiansen, R. D. Russel, *Collocation Software for Boundary-Value ODEs*, Math. Comput. **33** 659 (1979); ACM Trans. Math. Softw. **7** 209 (1981).
- [5] L. Jacobs and C. Rebbi, *Interaction energy of superconducting vortices*, Phys. Lett. B **19**, 4486 (1979);
- [6] F. Navarro-Lérida, J. Burzlaff, *Nielsen-Olesen vortices for a large Ginzburg-Landau parameter*, Phys. Rev. D **82**, 125033 (2010);
- [7] V. Rubakov, *Classical Theory of Gauge Fields*, Princeton University Press, 2002;