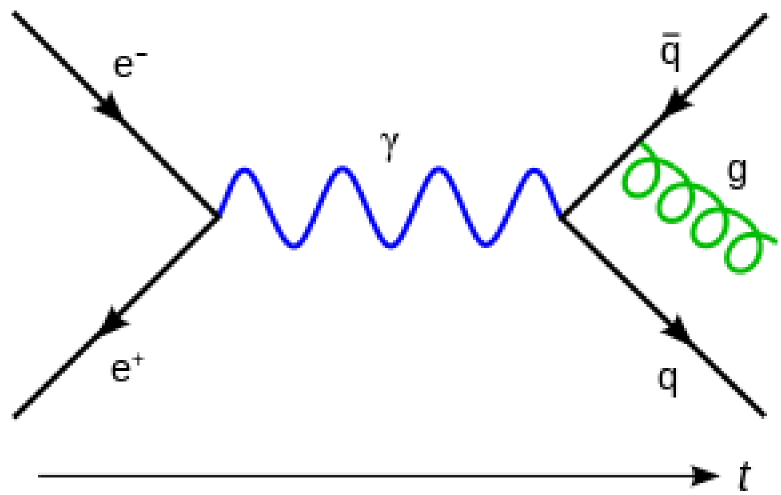
Campos Cuánticos

Entregables resueltos



Gonzalo Contreras Aso

Propuestos por Antonio Dobado durante el curso 2016-2017

14 de febrero de 2017

Índice general

Notación y convenios

- En todo lo que sigue vamos a tener en cuenta el «convenio de sumación de Einstein», por el cual un término con un superíndice y un subíndice iguales llevará implícito un sumatorio sobre todos los posibles valores de ese índice.

$$\text{Ejemplo: } x^\mu p_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{4} x^\mu p_\mu$$

- Los índices griegos tendrán valores «cuatridimensionales», (0,1,2,3), mientras que los índices latinos tendrán valores únicamente espaciales, (1,2,3).

- Nuestra métrica será la métrica usada en los círculos de física de partículas, que tendrá signatura $(+,-,-,-)$, siendo por ejemplo la de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)$. La razón de esto es para que las energías sean positivas, (ya que son lo más importante que se calcula en esta asignatura, a cambio de que los cálculos de posiciones darán como resultado números negativos).

Capítulo 0

Ecuaciones de Klein-Gordon y de Dirac

0.1. Entregable 1

Dado $\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*)$ *y* $\rho = |\psi|^2$*, comprobar, usando las ecuaciones de Schrödinger y Klein-Gordon, que satisfacen la ecuación de continuidad:*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{1}$$

Caso Schrödinger
Sabiendo que la ecuación de Schrödinger no relativista tiene la siguiente forma:

$$ih\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = \left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V\right)\psi \tag{2}$$

Y que la ecuación para la ψ^* es:

$$ih\frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -H\psi^* = -\left(-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m} + V\right)\psi^* \tag{3}$$

Operamos el término de ρ de la ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\psi\psi^* = \psi\frac{\partial \psi^*}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial t}\psi^* = \frac{i}{\hbar}\psi(H\psi^*) - \frac{i}{\hbar}(H\psi)\psi^* \\
&= \frac{i}{\hbar}\left(-\psi\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi^* + \cancel{\psi V \psi^*} + \psi^*\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi - \cancel{\psi^* V \psi}\right) \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}(\psi\nabla^2\psi^* - \psi^*\nabla^2\psi)
\end{aligned}$$

Vemos que vamos por buen camino, ya que eso se parece a la parte de $\vec{j}$ de la ecuación de continuidad. En efecto, si operamos esa parte:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{j} &= -\frac{i\hbar}{2m}\vec{\nabla}(\psi^*\vec{\nabla}\psi-\psi\vec{\nabla}\psi^*) = -\frac{i\hbar}{2m}\left[\vec{\nabla}(\psi^*\vec{\nabla}\psi)-\vec{\nabla}(\psi\vec{\nabla}\psi^*)\right] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}\left[\cancel{(\vec{\nabla}\psi^*)(\vec{\nabla}\psi)}+\psi^*\nabla^2\psi-\cancel{(\vec{\nabla}\psi)(\vec{\nabla}\psi^*)}-\psi\nabla^2\psi^*\right] \\
&= -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\psi^*) = -\frac{\partial\rho}{\partial t}
\end{aligned}$$

En efecto, comprobamos que se cumple la ecuación de continuidad en este caso.

Caso Klein-Gordon
La ecuación de Klein-Gordon es la siguiente (independiente de si se trata de ψ o ψ^*):

$$(\Box+m^2)\psi = (\partial_\mu\partial^\mu+m^2)\psi = 0 \tag{4}$$

Para este caso nos interesa escribir la ecuación de continuidad (1) con notación de cuadri-vectores, en este caso con $j^\mu = (\rho,\vec{j}) = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi-\psi\partial^\mu\psi^*)$:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0 \tag{5}$$

Si operamos la parte izquierda junto con la definición de j^μ:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= \frac{i\hbar}{2m}\partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi-\psi\partial^\mu\psi^*) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi)-\partial_\mu(\psi\partial^\mu\psi^*)\right] \\
&= \frac{i\hbar}{2m}(\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi+\psi^*\Box\psi-\partial_\mu\psi\partial^\mu\psi^*-\psi\Box\psi^*)
\end{aligned}$$

Subiendo y bajando índices ($\partial_\mu\psi^*\partial^\mu\psi = \partial_\mu\psi^*\partial_\nu\psi g^{\mu\nu} = \partial^\nu\psi^*\partial_\nu\psi$), llegamos a la conclusión de que el primer y tercer término de la suma son iguales y se anulan. Por tanto solo queda utilizar la ecuación de Klein-Gordon:

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\Box\psi-\psi\Box\psi^*) = \frac{i\hbar}{2m}(-\psi^*m^2\psi+\psi m^2\psi^*) = 0$$

En efecto, para este caso también comprobamos que la ecuación de continuidad se cumple.

0.2. Entregable 2

Obtener $\vec{\Pi}$ (momento canónico conjugado) a partir de $\mathcal{L}$, siendo $\mathcal{L}$ la Lagrangiana de una partícula cargada.

La Lagrangiana de una partícula cargada (en unidades naturales) es la siguiente:

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2}+q\vec{v}\vec{A}-q\phi \tag{1}$$

Por otro lado, sabemos como calcular los momentos canónicos conjugados a partir de Lagrangianas:

$$\Pi^i \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i} \tag{2}$$

Por tanto, introduciendo (1) en (2):

$$\begin{aligned}
\Pi^i &= \frac{\partial}{\partial v_i}\Big[-m\sqrt{1-v^2}+q\vec{v}\vec{A}\Big] = mv^i\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}+qA^i \\
&= \gamma m v^i + qA^i = p^i + qA^i
\end{aligned}$$

Así que, vectorialmente, el momento canónico conjugado es:

$$\vec{\Pi} = \vec{p} + q\vec{A} \tag{3}$$

0.3. Entregable 3

Obtener el Hamiltoniano de una partícula cargada en un campo electromagnético, a partir de su Lagrangiana.

La Lagrangiana es la del entregable anterior:

$$\mathcal{L}(\vec{x},\vec{v}) = -m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi$$

donde m y q son, respectivamente,la masa y la carga de la partícula, $\vec{v}$ es su velocidad, y $\vec{A}$ y ϕ los potenciales electromagnéticos. La fórmula de mecánica clásica para obtener el Hamiltoniano a partir de la Lagrangiana es la siguiente:

$$\mathcal{H}(\vec{x},\vec{\Pi}) = \vec{v}\cdot\vec{\Pi} - \mathcal{L} \tag{1}$$

con $\vec{\Pi}$ el momento canónico conjugado. Este lo calculamos en el entregable anterior, y era de la forma siguiente:

$$\vec{\Pi} = \vec{p} + q\vec{A}$$

siendo $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$ el momento relativista. Sustituyéndolo en (1) nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \vec{v}\cdot(\vec{p}+q\vec{A}) - \mathcal{L} \\
&= m\gamma v^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A} - \mathcal{L}
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, sustituimos la Lagrangiana en la expresión anterior, y operamos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= m\gamma v^2 + q\vec{v}\cdot\vec{A} - \left(-m\sqrt{1-v^2} + q\vec{v}\cdot\vec{A} - q\phi\right) \\
&= m\gamma v^2 + \cancel{q\vec{v}\cdot\vec{A}} + m\sqrt{1-v^2} - \cancel{q\vec{v}\cdot\vec{A}} + q\phi \\
&= m\left(\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} + \sqrt{1-v^2}\right) + q\phi \\
&= m\sqrt{\left(\frac{v^2}{1-v^2} + \sqrt{1-v^2}\right)^2} + q\phi \\
&= m\sqrt{\frac{v^4}{1-v^2} + 1 - v^2 + 2v^2 + q\phi} \\
&= m\sqrt{\frac{\cancel{v^4} + 1 + \cancel{v^4} - \cancel{2}v^2 + \cancel{2}v^2 - \cancel{2v^4}}{1-v^2}} + q\phi \\
&= m\sqrt{\frac{1-v^2+v^2}{1-v^2}} + q\phi = m\sqrt{1+\gamma^2 v^2} + q\phi \\
&= \sqrt{m^2 + m^2\gamma^2 v^2} + q\phi = \sqrt{m^2 + p^2} + q\phi
\end{aligned}
$$

Finalmente llegamos al resultado que buscábamos, que haciendo la sustitución del momento $\vec{p}$ con la fórmula del momento conjugado, no depende directamente de la velocidad, si no del momento canónico conjugado, que es lo que buscábamos:

$$\mathcal{H}(\vec{x},\vec{\Pi}) = \sqrt{m^2 + \left(\vec{\Pi} - q\vec{A}\right)^2} + q\phi \tag{2}$$

0.4. Entregable 4

Reescribir la ecuación de Pauli de tal forma que aparezca el término $\vec{S}\cdot\vec{B}$

El objetivo de este entregable es partir de la Ecuación de Pauli para un partícula no relativista con spin sometida a campos electromagnéticos,

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}[\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 + q\phi\right\}\varphi \tag{1}$$

(siendo $\vec{\sigma}$ el vector de matrices de Pauli) y llegar a la ecuación siguiente:

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \left\{\frac{1}{2m}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - \frac{q}{m}\vec{S}\cdot\vec{B} + q\phi\right\}\varphi, \quad \vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2} \tag{2}$$

Para llegar a este resultado, hemos de usar una propiedad de las matrices de Pauli:

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\vec{b})\mathbb{I} + i(\vec{a}\times\vec{b})\vec{\sigma} \tag{3}$$

Lo que hacemos es expresar la parte elevada al cuadrado de la ecuación de Pauli como:

$$[\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 = [\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})] \cdot [\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]$$

A esto le aplicamos la propiedad (3), teniendo en cuenta que, en nuestro caso, $\vec{a} = \vec{b} = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})$, con lo que obtenemos:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{a}) = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 + i(\vec{a} \times \vec{a})\vec{\sigma} \tag{4}$$

Como vemos que el primer término ya aparece en la ecuación (2), vamos a centrarnos ahora en el segundo, el producto vectorial. Por el momento vamos a olvidar tanto i como $\vec{\sigma}$, los añadiremos después.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{a} =& (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \times (-i\vec{\nabla} - q\vec{A}) \\ =& \cancel{(-i\vec{\nabla}) \times (-i\vec{\nabla})} + (-i\vec{\nabla}) \times (-q\vec{A}) \\ &+ (-q\vec{A}) \times (-i\vec{\nabla}) + \cancel{(-q\vec{A}) \times (-q\vec{A})}\end{aligned}$$

Al anularse los productos vectoriales de un vector por si mismo, solo nos quedan esos dos productos. Ahora sí, completamos el segundo término de la ecuación (4):

$$\begin{aligned} i(\vec{a} \times \vec{a})\vec{\sigma} &= i[iq\vec{\nabla} \times \vec{A} + iq\vec{A} \times \vec{\nabla}]\vec{\sigma} \\ &= -q(\vec{B} + \vec{A} \times \vec{\nabla})\vec{\sigma} \\ &= -q\vec{B}\vec{\sigma} - \cancel{q(\vec{A} \times \vec{\nabla})\vec{\sigma}} \end{aligned}$$

El último término es nulo porque las derivadas de las matrices de Pauli son nulas. Así que finalmente, juntando este resultado con la ecuación (4), llegamos a lo siguiente:

$$[\vec{\sigma}(-i\vec{\nabla} - q\vec{A})]^2 = (-i\vec{\nabla} - q\vec{A})^2 - q\vec{B}\vec{\sigma}$$

Y con este resultado introducido en la ecuación (1), teniendo en cuenta que $\vec{S} = \dfrac{\vec{\sigma}}{2}$ llegamos al objetivo del entregable, la ecuación (2).

0.5. Entregable 5

Demostrar dos igualdades para las soluciones de la Ecuación de Dirac, $\{u^s, s = 1, 2\}$.

Las soluciones que vamos a manejar son de la siguiente forma:

$$u^s = \begin{pmatrix} \sqrt{P \cdot \sigma}\xi^s \\ \sqrt{P \cdot \bar{\sigma}}\xi^s \end{pmatrix} \tag{1}$$

También necesitamos las siguientes definiciones y propiedades:

$$\begin{cases} \sigma^\mu = (\mathbb{I}, \vec{\sigma}) \\ \bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma}) \end{cases} \quad \begin{cases} (\xi^s)^\dagger \xi^t = \delta^{st} \\ \sum_s \xi^s (\xi^s)^\dagger = \mathbb{I} \end{cases} \tag{2}$$

Siendo $\vec{\sigma}$ las 3 matrices de Pauli.
Y finalmente necesitamos las definiciones de la «notación de slash de Feynman» $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$ y de adjunto de Dirac $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$, siendo γ^μ las matrices gamma de Dirac, en representación quiral:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^\nu = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Las igualdades que tenemos que demostrar son las siguientes:

$$\begin{cases} \bar{u}^t(p) u^s(p) = 2\delta^{ts} m \\ \sum_s u^s(p) \bar{u}^s(p) = \not{P} + m \end{cases} \tag{Ig.1, Ig.2}$$

Primera igualdad

Partimos del lado derecho de la igualdad **Ig.1**:

$$\begin{aligned} \bar{u}^t(p) u^s(p) = (u^t)^\dagger \gamma^0 u^s &= \left(\sqrt{P\sigma} (\xi^t)^\dagger \; \sqrt{P\bar{\sigma}} (\xi^t)^\dagger \right) \begin{pmatrix} 0 \; \mathbb{I} \\ \mathbb{I} \; 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{P\sigma} \xi^s \\ \sqrt{P\bar{\sigma}} \xi^s \end{pmatrix} \\ &= \left(\sqrt{P\sigma} (\xi^t)^\dagger \; \sqrt{P\bar{\sigma}} (\xi^t)^\dagger \right) \begin{pmatrix} \sqrt{P\bar{\sigma}} \xi^s \\ \sqrt{P\sigma} \xi^s \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{P\sigma}\sqrt{P\bar{\sigma}} (\xi^t)^\dagger \xi^s + \sqrt{P\bar{\sigma}}\sqrt{P\sigma} (\xi^t)^\dagger \xi^s \\ &= 2\sqrt{P\sigma}\sqrt{P\bar{\sigma}} (\xi^t)^\dagger \xi^s \end{aligned}$$

Por la primera propiedad de las ξ, (2), obtenemos:

$$\bar{u}^t(p) u^s(p) \;\; = \;\; 2\delta^{ts} \sqrt{(P\sigma)(P\bar{\sigma})} \tag{4}$$

Ahora hemos de operar el interior de la raíz, primero $P\sigma$:

$$P\sigma \;\; = \;\; p_0 \mathbb{I} - \vec{p}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_0 - p_3 & ip_2 - p_1 \\ -ip_2 - p_1 & p_0 + p_3 \end{pmatrix}$$

Análogamente para $P\bar{\sigma}$:

$$P\bar{\sigma} \;\; = \;\; p_0 \mathbb{I} + \vec{p}\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_0 + p_3 & -ip_2 + p_1 \\ ip_2 + p_1 & p_0 - p_3 \end{pmatrix}$$

Si los multiplicamos, obtenemos:

$$(P\sigma)(P\bar{\sigma}) \;=\; \begin{pmatrix} p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 & 0 \\ 0 & p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\mu p^\mu & 0 \\ 0 & p_\mu p^\mu \end{pmatrix} = P^2 \mathbb{I}$$

De acuerdo con la ecuación (4), tenemos que hacer la raíz de esto. La «raíz» de una matriz diagonal es la raíz de cada uno de los elementos de la diagonal. En nuestro caso, será la raíz de P^2 por la identidad, siendo a su vez P el cuadrimomento relativista, es decir:

$$\sqrt{(P\sigma)(P\bar{\sigma})} = \sqrt{P^2 \mathbb{I}} = \sqrt{m^2 \mathbb{I}} = m\mathbb{I}$$

Introduciendo esto en la ecuación (4) obtenemos finalmente:

$$\bar{u}^t(p) u^s(p) \;=\; 2\delta^{ts} m\mathbb{I} = 2\delta^{ts} m$$

Q.E.D.

Segunda igualdad

De nuevo partimos del lado derecho de la igualdad **Ig.2**:

$$\begin{aligned} \sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) &= \sum_s u^s(p)(u^s)^\dagger \gamma^0 = \sum_s \begin{pmatrix} \sqrt{(P\sigma)}\xi^s \\ \sqrt{(P\bar{\sigma})}\xi^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{P\bar{\sigma}}(\xi^s)^\dagger & \sqrt{P\sigma}(\xi^s)^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_s \xi^s (\xi^s)^\dagger\right) \begin{pmatrix} \sqrt{(P\sigma)(P\bar{\sigma})} & P\sigma \\ P\bar{\sigma} & \sqrt{(P\sigma)(P\bar{\sigma})} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & P\sigma \\ P\bar{\sigma} & m\mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & P\sigma \\ P\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\mathbb{I} & 0 \\ 0 & m\mathbb{I} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos a ocuparnos ahora de la primera matriz, ya que la segunda se encuentra en la forma que queríamos.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & P\sigma \\ P\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & p_0\mathbb{I} - \vec{p}\vec{\sigma} \\ p_0\mathbb{I} + \vec{p}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \\ &= p_0 \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} - \vec{p} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = p_\mu \gamma^\mu \end{aligned}$$

Este resultado tenemos que recordad que podemos expresarlo con la definición de «slash de Feynman», así que finalmente juntando este resultado con el de la ecuación anterior. obtenemos que:

$$\sum_s u^s(p)\bar{u}^s(p) \;=\; p_\mu \gamma^\mu + m\mathbb{I} = \not{P} + m$$

Q.E.D.

Capítulo 1

Cuantización del campo electromagnético

1.1. Entregable 6

Obtener los conmutadores: $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$*,* $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$*,* $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$

Para comenzar vamos a ver la actuación de los operadores creación ($\hat{a}^\dagger$) y destrucción ($\hat{a}$) sobre un ket:

$$\begin{cases} \hat{a}^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \\ \hat{a}\,|n\rangle &= \sqrt{n}\,|n-1\rangle \end{cases} \tag{1.1}$$

Y también la actuación del operador número ($\hat{N}$) sobre un ket:

$$\hat{N}\,|n\rangle = \hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{1.2}$$

Ahora podemos empezar a calcular conmutadores, aplicando cada uno de ellos a un ket. Comenzamos por el de $\hat{a}$ con $\hat{a}^\dagger$:

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\,|n\rangle &= (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a})\,|n\rangle = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{N})\,|n\rangle \\ &= \hat{a}\sqrt{n+1}\,|n+1\rangle - n\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}\,|n\rangle - n\,|n\rangle \\ &= (\cancel{n} + 1 - \cancel{n})\,|n\rangle = 1\,|n\rangle \\ &\Rightarrow [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \end{aligned}$$

Para los dos siguientes conmutadores, vamos a usar un truco: expresarlos en función del conmutador anteriormente obtenido, el de $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$.

$$\begin{aligned} [\hat{N}, \hat{a}]\,|n\rangle &= (\hat{N}\hat{a} - \hat{a}\hat{N})\,|n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a})\,|n\rangle \\ &= (\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)\hat{a}\,|n\rangle = -[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\hat{a}\,|n\rangle = -\hat{a}\,|n\rangle \\ &\Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a} \end{aligned}$$

Lo mismo hacemos con el último conmutador:

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle &= (\hat{N}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{N}) |n\rangle = (\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}) |n\rangle \\
&= \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}) |n\rangle = \hat{a}^\dagger[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] |n\rangle = \hat{a}^\dagger |n\rangle \\
& \Rightarrow [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger
\end{aligned}$$

1.2. Entregable 7

Comprobar que los vectores $\vec{k}$, $\vec{\epsilon_1}$, y $\vec{\epsilon_2}$ forman un triedro dextrógiro.

Los 3 vectores a analizar son los siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
\vec{k} &=& \omega \big(\sin\theta\cos\varphi, \quad \sin\theta\sin\varphi, \quad \cos\theta\big) \\
\vec{\epsilon_1} &=& \big(\cos\theta\cos\varphi, \quad \cos\theta\sin\varphi, \quad -\sin\theta\big) \\
\vec{\epsilon_2} &=& \big(-\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad 0\big)
\end{array} \right. \tag{1.1}$$

Gráficamente lo que tenemos es:

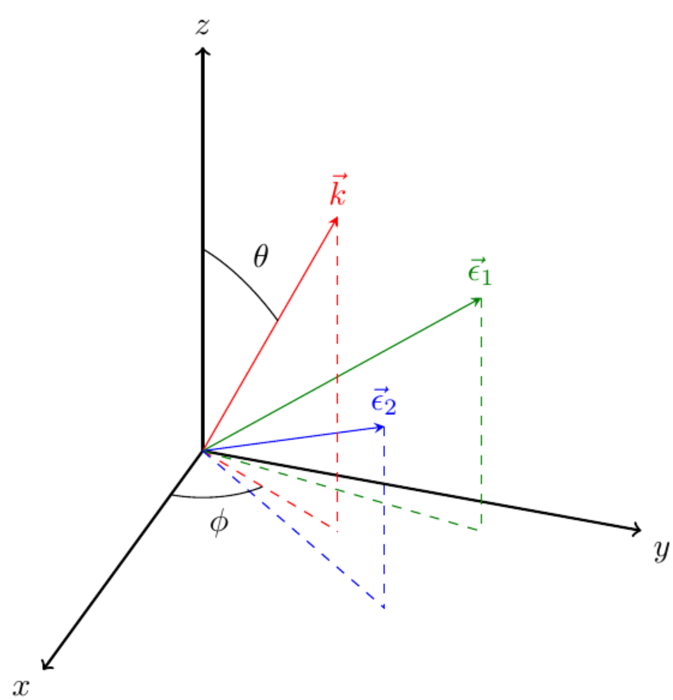


Figura 1.1: Triedro de vectores genéricos

Para comprobar que forman un triedro dextrógiro lo primero que tenemos que ver es que se cumpla la condición de $\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_\lambda = 0; \lambda = 1,2$. Comenzamos con $\vec{\epsilon}_1$:

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_1 &= \omega(\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi - \sin\theta\cos\theta)\\ &= \omega(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta) = 0\end{aligned}$$

Ya lo hemos comprobado para $\vec{\epsilon}_1$, ahora toca comprobarlo para $\vec{\epsilon}_2$:

$$\vec{k}\cdot\vec{\epsilon}_2 \quad = \quad \omega(-\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0) = 0$$

Finalmente, para que sea realmente dextrógiro y no levógiro, el producto escalar de $\vec{k}$ con $\vec{\epsilon}_1 \times \vec{\epsilon}_2$ ha de ser positivo:

$$\begin{aligned}\vec{k}\cdot(\vec{\epsilon}_1\times\vec{\epsilon}_2) &= \vec{k}\cdot\Big(\cos\varphi\sin\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\theta\cos^2\varphi + \cos\theta\sin^2\varphi\Big)\\ &= \omega(\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\sin^2\varphi)\\ &= \omega(\sin^2\theta(1 - \cancel{\sin^2\varphi}) + \cancel{\sin^2\theta\sin^2\varphi} + \cos^2\theta) = \omega > 0\end{aligned}$$

Si fuera levógiro ese producto escalar sería negativo. Por tanto concluimos que esos tres vectores forman un triedro dextrógiro.

1.3. Entregable 8

Expresar el Hamiltoniano del campo electromagnético como una combinación de osciladores armónicos con las coordenadas $\vec{Q}_k$ y $\vec{P}_k$.

Vamos a partir del Hamiltoniano en términos de $\vec{A}_k$

$$\mathcal{H} = \frac{V}{2}\sum_k(\dot{\vec{A}}_k\dot{\vec{A}}^*_k + \omega_k^2\vec{A}_k\vec{A}^*_k) \tag{1.1}$$

y hemos del llegar al siguiente Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\sum_k(\vec{P}_k^2 + \omega_k^2\vec{Q}_k^2) \tag{1.2}$$

donde $\vec{Q}_k$ y $\vec{P}_k$ cumplen:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\vec{Q}_k &=& \sqrt{V}(\vec{a}_k + \vec{a}^*_k)\\ \vec{P}_k &=& -i\omega_k\sqrt{V}(\vec{a}_k - \vec{a}^*_k)\\ \dot{\vec{Q}}_k &=& \vec{P}_k\end{array}\right. \tag{1.3}$$

Y finalmente sabemos que los coeficientes $\vec{a}_k$, que provienen del desarrollo de $\vec{A}$, cumplen la siguiente propiedad:

$$\vec{A}_k = \vec{a}_k + \vec{a}^*_k \tag{1.4}$$

A partir de esta última propiedad (1.4) es trivial expresar la coordenada $\vec{Q}_k$ en función de $\vec{A}_k$:

$$\vec{Q}_k = \sqrt{V}(\vec{a}_k + \vec{a}_k^*) = \sqrt{V}\vec{A}_k$$

Es directo ver, por tanto, la relación entre las segundas partes de los Hamiltonianos (1.1) y (1.2):

$$|\vec{Q}_k|^2 = (\sqrt{V})^2|\vec{A}_k|^2 = V\vec{A}_k\vec{A}_k^*$$

$$\Rightarrow \vec{A}_k\vec{A}_k^* = \frac{\vec{Q}_k^2}{V} \tag{1.5}$$

Y a su vez, usando la tercera igualdad de (1.3):

$$|\vec{P}_k|^2 = |\dot{\vec{Q}}_k|^2 = (\sqrt{V}\dot{\vec{A}}_k)^2 = V|\dot{\vec{A}}_k|^2 = V\dot{\vec{A}}_k\dot{\vec{A}}_k^*$$

$$\Rightarrow \dot{\vec{A}}_k\dot{\vec{A}}_k^* = \frac{\vec{P}_k^2}{V} \tag{1.6}$$

Introduciendo los resultados (1.5) y (1.6) en el Hamiltoniano (1.1) obtenemos lo que buscábamos, el Hamiltoniano (1.2).

1.4. Entregable 9

A partir de las definiciones de $\hat{a}_{k\lambda}$ y $\hat{a}_{k\lambda}^\dagger$, y teniendo en cuenta los conmutadores de $\hat{P}_{k\lambda}$ y $\hat{Q}_{k\lambda}$, demostrar las relaciones de conmutación $\left[\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger\right] = \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}$, $\left[\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}\right] = \left[\hat{a}_{k\lambda}^\dagger, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger\right] = 0$

Las definiciones de $\hat{a}_{k\lambda}$ y $\hat{a}_{k\lambda}^\dagger$ en función de $\hat{P}_{k\lambda}$ y $\hat{Q}_{k\lambda}$ son las siguientes:

$$\begin{cases} \hat{a}_{k\lambda} & \equiv & \sqrt{\dfrac{\omega_k}{2}}(\hat{Q}_{k\lambda} + \dfrac{i}{\omega_k}\hat{P}_{k\lambda}) \\ \hat{a}_{k\lambda}^\dagger & = & \sqrt{\dfrac{\omega_k}{2}}(\hat{Q}_{k\lambda} - \dfrac{i}{\omega_k}\hat{P}_{k\lambda}) \end{cases} \tag{1.1}$$

y los conmutadores de $\hat{P}_{k\lambda}$ y $\hat{Q}_{k\lambda}$ son:

$$\begin{cases} \left[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\right] & = & i\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} \\ \left[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\right] & = & \left[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\right] = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Ahora sí, vamos a calcular los conmutadores que queremos:

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}^\dagger] &= \frac{\omega_k}{2}\left[\hat{Q}_{k\lambda} + \frac{i}{\omega_k}\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'} - \frac{i}{\omega_{k'}}\hat{P}_{k'\lambda'}\right] \\ &= \frac{\omega_k}{2}\Big(\cancel{\left[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\right]} - \frac{i^2}{\omega_k\omega_{k'}}\cancel{\left[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\right]} - \frac{i}{\omega_{k'}}\left[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\right] + \frac{i}{\omega_k}\left[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\right]\Big) \\ &= \frac{\omega_k}{2}\Big(\frac{i}{\omega_{k'}}i\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} + \frac{i}{\omega_k}(-i)\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}\Big) \\ &= \frac{\omega_k}{2}\frac{2}{\omega_k}\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} = \delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[\hat{a}_{k\lambda}, \hat{a}_{k'\lambda'}] &= \frac{\omega_k}{2}\big[\hat{Q}_{k\lambda} + \frac{i}{\omega_k}\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'} + \frac{i}{\omega_{k'}}\hat{P}_{k'\lambda'}\big] \\
&= \frac{\omega_k}{2}\Big(\cancel{\big[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\big]} + \frac{i^2}{\omega_k\omega_{k'}}\cancel{\big[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\big]} + \frac{i}{\omega_{k'}}\big[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\big] + \frac{i}{\omega_k}\big[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\big]\Big) \\
&= \frac{\omega_k}{2}\Big(\frac{i}{\omega_{k'}}i\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} + \frac{i}{\omega_k}(-i)\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}\Big) = 0 \\
[\hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}, \hat{a}^{\dagger}_{k'\lambda'}] &= \frac{\omega_k}{2}\big[\hat{Q}_{k\lambda} - \frac{i}{\omega_k}\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'} - \frac{i}{\omega_{k'}}\hat{P}_{k'\lambda'}\big] \\
&= \frac{\omega_k}{2}\Big(\cancel{\big[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\big]} + \frac{i^2}{\omega_k\omega_{k'}}\cancel{\big[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\big]} - \frac{i}{\omega_{k'}}\big[\hat{Q}_{k\lambda}, \hat{P}_{k'\lambda'}\big] - \frac{i}{\omega_k}\big[\hat{P}_{k\lambda}, \hat{Q}_{k'\lambda'}\big]\Big) \\
&= \frac{\omega_k}{2}\Big(\frac{i}{\omega_{k'}}i\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} - \frac{i}{\omega_k}(-i)\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}\Big) = 0
\end{aligned}
$$

Q.E.D.

1.5. Entregable 10

Dada una base del Espacio de Hilbert $\mathcal{E}$, $|n_{k_1\lambda_1}, n_{k_2\lambda_2}, n_{k_1\lambda_1}, ...\rangle \equiv |n_{k_i\lambda_i}\rangle$, calcular el valor esperado de: $\langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}|n_{k_i\lambda_i}\rangle$ y $\langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}^2|n_{k_i\lambda_i}\rangle$

Primero vamos a ver la definición del operador campo eléctrico en términos de los operadores creación y destrucción:

$$
\hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) = -\frac{i}{\sqrt{2V}}\sum_{k\lambda}\sqrt{\omega_k}\Big(\vec{\epsilon}_\lambda \hat{a}_{k\lambda}e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})} - \vec{\epsilon}^{\,*}_\lambda \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}e^{i(\omega_k t - \vec{k}\vec{x})}\Big) \tag{1.1}
$$

Claramente, el valor medio del campo en cualquier estado será nulo, por culpa de los operadores de creación y destrucción, debido a la ortogonalidad entre estados. Para hacerlo más explícito:

$$
\begin{aligned}
\hat{\vec{E}} &\propto \sum_{k\lambda}(\hat{a_{k\lambda}} - \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}) \\
\Rightarrow \langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}|n_{k_i\lambda_i}\rangle &\propto \sum_{k\lambda}\langle n_{k_i\lambda_i}|\,(\hat{a_{k\lambda}} - \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda})\,|n_{k_i\lambda_i}\rangle \\
&\propto \sum_{k\lambda}\langle n_{k_i\lambda_i}|\,(|n-1\rangle_{k_i\lambda_i} - |n+1\rangle_{k_i\lambda_i}) = 0
\end{aligned}
$$

En el caso del campo al cuadrado, tenemos que tener en cuenta que por la ortogonalidad de estados solo contribuyen los términos que no tienen dobles operadores destrucción y creación, es decir, solo contribuirán los que tengan uno de creación y otro de destrucción:

$$
\begin{aligned}
\langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}^2|n_{k_i\lambda_i}\rangle &= \langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}\cdot\hat{\vec{E}}^*|n_{k_i\lambda_i}\rangle \\
&\propto \sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}\,\langle n_{k_i\lambda_i}|\big(\hat{a}_{k\lambda} - \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}\big)\big(\hat{a}^{\dagger}_{k'\lambda'} - \hat{a}_{k'\lambda'}\big)|n_{k_i\lambda_i}\rangle \\
&= \sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}\,\langle n_{k_i\lambda_i}|\big(\hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^{\dagger}_{k'\lambda'} - \hat{a}_{k\lambda}\hat{a}_{k'\lambda'} - \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}\hat{a}^{\dagger}_{k'\lambda'} + \hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}\hat{a}_{k'\lambda'}\big)|n_{k_i\lambda_i}\rangle
\end{aligned}
$$

Nos podemos fijar en que de esos cuatro términos los dos centrales no contribuyen ya que uno sube dos niveles y el otro baja dos, por lo cual valor esperado serán nulo al ser diferentes el bra y el ket.

$$\begin{aligned}
\langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{\vec{E}}^2|n_{k_i\lambda_i}\rangle &\propto \sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}\,\langle n_{k_i\lambda_i}|\hat{a}_{k\lambda}\hat{a}^{\dagger}_{k'\lambda'}+\hat{a}^{\dagger}_{k\lambda}\hat{a}_{k'\lambda'}|n_{k_i\lambda_i}\rangle \\
&= 2\sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}\,\langle n_{k_i\lambda_i}|\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'}|n_{k_i\lambda_i}\rangle \\
&= 2\sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'}\sqrt{\omega_k\omega_{k'}}\delta_{k,k'}\delta_{\lambda,\lambda'} \\
&= \sum_{k\lambda}\omega_k=\infty
\end{aligned}$$

1.6. Entregable 11

Demostrar la siguiente igualdad: $\langle B|\hat{\vec{P}}|A\rangle = im_e\,\langle B|\big[\hat{H}_{at},\hat{\vec{X}}\big]|A\rangle$

Sabemos que el Hamiltoniano atómico $\hat{H}_{at}$ tiene la siguiente forma:

$$\hat{H}_{at}=\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m_e}+\hat{V}(\vec{x}) \tag{1.1}$$

Y que el conmutador de x con p es:

$$[\hat{\vec{X}},\hat{\vec{P}}]=i \tag{1.2}$$

Comenzamos a operar con el conmutador, teniendo en cuenta la propiedad $[A+B,C]=[A,C]+[B,C]$, y que $\hat{V}$, al ser función únicamente de $\vec{x}$, conmuta con $\hat{\vec{X}}$.

$$\big[\hat{H}_{at},\hat{\vec{X}}\big] = \left[\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m_e}+\hat{V}(\vec{x}),\hat{\vec{X}}\right]=\left[\frac{\hat{\vec{P}}^2}{2m_e},\hat{\vec{X}}\right]+\cancel{\big[\hat{V}(\vec{x}),\hat{\vec{X}}\big]}=\frac{1}{2m_e}\big[\hat{\vec{P}}^2,\hat{\vec{X}}\big]$$

Ahora usaremos la propiedad $[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B$.

$$\begin{aligned}
\big[\hat{H}_{at},\hat{\vec{X}}\big] &= \frac{1}{2m_e}\big[\hat{\vec{P}}^2,\hat{\vec{X}}\big]=\frac{1}{2m_e}(\hat{\vec{P}}[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{X}}]+[\hat{\vec{P}},\hat{\vec{X}}]\hat{\vec{P}})=\frac{1}{2m_e}(-i\hat{\vec{P}}-i\hat{\vec{P}}) \\
\Rightarrow \big[\hat{H}_{at},\hat{\vec{X}}\big] &= -\frac{i}{m_e}\hat{\vec{P}}
\end{aligned}$$

Con lo que ya tenemos probada la igualdad:

$$im_e\,\langle B|\big[\hat{H}_{at},\hat{\vec{X}}\big]|A\rangle = im_e\,\langle B|-\frac{i}{m_e}\hat{\vec{P}}|A\rangle=\langle B|\hat{\vec{P}}|A\rangle$$

Q.E.D.

1.7. Entregable 12

Demostrar que las coordenadas esféricas se pueden escribir en términos de los armónicos esféricos de la siguiente manera:

$$x_M = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_M^1(\theta,\varphi), \quad M = 0, \pm 1 \tag{1.1}$$

Para demostrarlo, hemos de reducir la fórmula anterior a la expresión original de las coordenadas esféricas:

$$x_\pm = \mp\frac{x \pm iy}{\sqrt{2}}, \quad x_0 = z \tag{1.2}$$

Necesitamos primero los tres armónicos esféricos Y_M:

$$Y_1^1 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{(x+iy)}{r}, \quad Y_{-1}^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{(x-iy)}{r}, \quad Y_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{z}{r} \tag{1.3}$$

Introduciendo esto en (1.1), obtenemos:

$$\begin{aligned}
M = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_+ = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{(x+iy)}{r}\right) = -\frac{x+iy}{\sqrt{2}} \\
M = -1 \quad &\Rightarrow \quad x_- = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\frac{(x-iy)}{r}\right) = \frac{x-iy}{\sqrt{2}} \\
M = 0 \quad &\Rightarrow \quad x_0 = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{z}{r}\right) = z
\end{aligned}$$

Q.E.D.

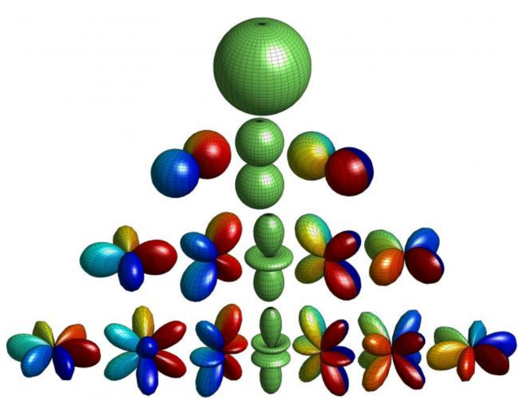


Figura 1.2: Representación de los primeros armónicos esféricos.

1.8. Entregable 13

Calcular el gradiente de la función radial para $n = 1$, $l = 0$.

$$\vec{\nabla} R_{10} = -R_{10} \frac{\vec{x}}{a_0 r}$$

La función radial en nuestro caso es:

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0} \tag{1.1}$$

Lo más lógico en este caso es utilizar el gradiente en coordenadas esféricas, del que además permanece solo el primer término, ya que R_{10} solo depende de r:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r}\hat{e}_r + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{e}_\theta} + \cancel{\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\hat{e}_\varphi} \tag{1.2}$$

Conviene también definir el vector $\vec{e}_r$ unitario en la dirección del vector posición $\vec{x}$, cuyo módulo es r

$$\hat{e}_r = \vec{x}/r \tag{1.3}$$

Por tanto:

$$\vec{\nabla} R_{10} = \frac{\partial R_{10}}{\partial r}\hat{e}_r = -\frac{2}{a_0^{3/2} a_0} e^{-r/a_0} \frac{\vec{x}}{r} = -R_{10} \frac{\vec{x}}{a_0 r}$$

Q.E.D.

Capítulo 2

Cuantización canónica (covariante) de un campo escalar

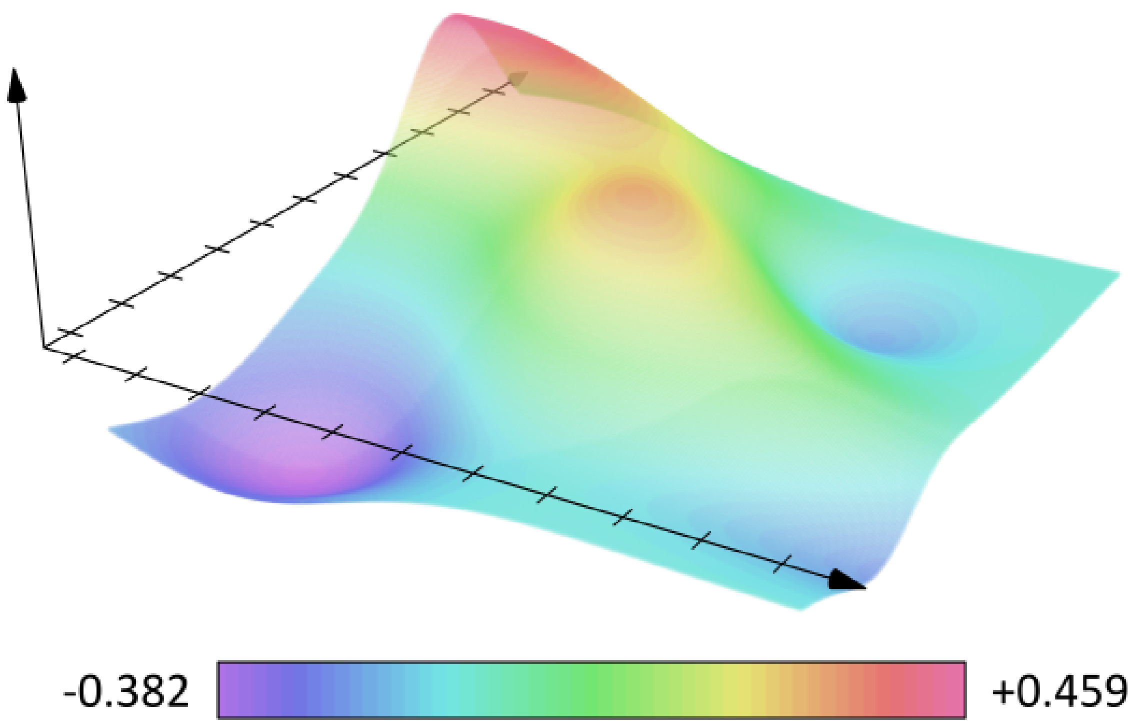


Figura 2.1: Campo escalar (por ejemplo, un campo de temperatura o presión)

2.1. Entregable 14

Dado A_μ*, y* $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$*, calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange para la siguiente Lagrangiana:*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para campos son las siguientes:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 0 \tag{2.1}$$

Comenzamos calculando el primer término, en el que solo contribuye la primera parte de la Lagrangiana, ya que la segunda no tiene derivadas de A_μ:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\Big(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F_{\rho\sigma}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Big) \\
&= -\frac{1}{4}\Big[(\delta^\nu_\alpha\delta^\mu_\beta - \delta^\nu_\beta\delta^\mu_\alpha)F_{\rho\sigma}g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma} + F_{\alpha\beta}(\delta^\nu_\rho\delta^\mu_\sigma - \delta^\nu_\sigma\delta^\mu_\rho)g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}\Big] \\
&= -\frac{1}{4}\Big[(g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})F_{\rho\sigma} + F_{\alpha\beta}(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu})\Big] \\
&= -\frac{1}{4}\Big(F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu} - F^{\mu\nu}\Big) = F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Derivando esto obtenemos:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = \partial_\nu F^{\mu\nu}$$

Por otro lado, tenemos el segundo término de las ecuaciones, en el que solo contribuirá la segunda parte de la Lagrangiana:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \;=\; \frac{\partial}{\partial A_\mu}\big(- A_\rho J^\rho\big) = -\delta^\mu_\rho J^\rho = -J^\mu$$

Por tanto, juntando ambos resultados, las ecuaciones que se obtienen son finalmente las de Maxwell:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -J^\mu \tag{2.2}$$

(El signo menos viene de que la derivada de F es respecto al segundo índice, es decir, podemos reescribirlo con la antisimetría de F así: $\partial_\nu F^{\nu\mu} = J^\mu$)

2.2. Entregable 15

Dados A_μ*,* $F_{\mu\nu}$*, la derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$*, encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange de* ψ *y* ψ^* *para la siguiente Lagrangiana:*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\psi)^*(D^\mu\psi) - m^2|\psi|^2$$

Y demostrar que la divergencia de $J^\nu = iq(\psi^* D^\nu \psi - \psi(D^\nu\psi)^*)$ vale cero.

La primera parte de la Lagrangiana no depende de ψ y ψ^*, por lo que nos centraremos en las dos siguientes. Lo primero que merece la pena destacar es que debido a la estructura de la Lagrangiana, las ecuaciones para ambos campos serán una la conjugada de la otra, por lo que con calcular una basta. Las ecuaciones de Euler-Lagrange serán las siguientes:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} - \frac{\partial}{\partial \psi} = 0 \tag{2.1}$$

Comenzamos con el primer término, que solo tendrá contribuciones del la parte de las derivadas covariantes de la Lagrangiana, la única en la que aparecen derivadas de ψ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \psi)}\Big[(D_\mu\psi)^*(D^\mu\psi)\Big] = \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu \psi)}\Big[(D_\mu\psi)^*(\partial_\rho\psi + iqA_\rho\psi)g^{\mu\rho}\Big] \\ &= (D_\mu\psi)^*\delta^\nu_\rho g^{\mu\rho} = (D^\nu\psi)^*\end{aligned}$$

Derivándolo obtenemos:

$$\partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu \psi)} = \partial_\nu[(D^\nu\psi)^*]$$

Continuamos con el segundo término de las ecuaciones, en el que solo contribuirán los dos últimos términos del la Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= \frac{\partial}{\partial \psi}\Big[(D_\mu\psi)^*(D^\mu\psi) - m^2|\psi|^2\Big] = \frac{\partial}{\partial \psi}\Big[(D_\mu\psi)^*(\partial_\rho\psi + iqA_\rho\psi)g^{\mu\rho} - m^2\psi\psi^*\Big] \\ &= (D_\mu\psi)^* iqA_\rho g^{\mu\rho} - m^2\psi^*\end{aligned}$$

Por lo tanto, la ecuación queda finalmente:

$$\partial_\nu[(D^\nu\psi)^*] - (D_\mu\psi)^* iqA_\rho g^{\mu\rho} + m^2\psi^* = 0 \tag{2.2}$$

Reescribiendo esta expresión, obtenemos una similar a la de Klein-Gordon, conjugándola encontramos la otra ecuación de Euler-Lagrange:

$$\left\{\begin{array}{lcl}(\Box + m^2)\psi^* &=& qA^2\psi^* + iq\big(\psi^*\partial^\mu A_\mu + 2A_\mu\partial^\mu\psi^*\big) \\ (\Box + m^2)\psi &=& qA^2\psi - iq\big(\psi\partial^\mu A_\mu + 2A_\mu\partial^\mu\psi\big)\end{array}\right. \tag{2.3}$$

Ahora, vamos a utilizar este resultado para demostrar $\partial_\nu J^\nu = 0$. No voy a escribir todos los pasos ya que es largo. Para simplificar el cálculo, observamos que los dos sumandos de J^ν son uno el conjugado del otro, por tanto derivaremos el primero, y luego le restaremos eso mismo conjugado:

$$\begin{aligned}\partial_\nu(\psi^* D^\nu\psi) &= \partial_\nu\psi^* D^\nu\psi + \psi^*\partial_\nu(\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi)g^{\mu\nu} \\ &= \partial_\nu\psi^*\big(\partial_\mu\psi + iqA_\mu\psi\big)g^{\mu\nu} + \psi^*\big(\Box\psi + iq\partial^\mu(A_\mu\psi)\big) \\ &= \underbrace{\partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi}_{\equiv A} + \underbrace{iqA_\mu\psi\partial^\mu\psi^*}_{\equiv B} + \underbrace{\psi^*\Box\psi}_{\equiv C} + \underbrace{iq|\psi|^2\partial^\mu A_\mu}_{\equiv D} + \underbrace{iq\psi^* A_\mu\partial^\mu\psi}_{\equiv E} \\ \Rightarrow \partial_\nu J^\nu &= iq(A - A^* + B - B^* + C - C^* + D - D^* + E - E^*)\end{aligned}$$

Vamos a operar término a término ahora:

$$\begin{aligned}
A - A^* &= \partial^\mu\psi^*\partial_\mu\psi - \partial^\mu\psi\partial_\mu\psi^* = 0\\
B - B^* &= iqA_\mu\big(\psi\partial^\mu\psi^* + \psi^*\partial^\mu\psi\big) = iqA_\mu\partial^\mu|\psi|^2\\
C - C^* &= \psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^*\\
D - D^* &= iq|\psi|^2\partial^\mu A_\mu + iq|\psi|^2\partial^\mu A_\mu = 2iq|\psi|^2\partial^\mu A_\mu\\
E - E^* &= iqA_\mu\big(\psi^*\partial^\mu\psi + \psi\partial^\mu\psi^*\big) = iqA_\mu\partial^\mu|\psi|^2\\
B - B^* + E - E^* + D - D^* &= 2iq(A_\mu\partial^\mu|\psi|^2 + |\psi|^2\partial^\mu A_\mu) = 2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2)\\
&\Rightarrow \partial_\nu J^\nu = iq\big[2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2) + \psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^*\big]
\end{aligned}$$

A primera vista esto no parece que vaya a anularse, pero tenemos que tener en cuenta las ecuaciones dinámicas (3). Despejando de ellas $\Box\psi^*$ y $\Box\psi$, y multiplicando esto por ψ y ψ^*, respectivamente, obtenemos:

$$\begin{cases}
\psi\Box\psi^* = -m^2|\psi|^2 + qA^2|\psi|^2 + iq\big(|\psi|^2\partial^\mu A_\mu + 2A_\mu\psi\partial^\mu\psi^*\big)\\
\psi^*\Box\psi = -m^2|\psi|^2 + qA^2|\psi|^2 - iq\big(|\psi|^2\partial^\mu A_\mu + 2A_\mu\psi^*\partial^\mu\psi\big)
\end{cases}$$

$$\Rightarrow \psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^* = -2iq|\psi|^2\partial^\mu A_\mu - 2iqA_\mu\big(\psi\partial^\mu\psi^* + \psi^*\partial^\mu\psi\big) = -2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2)$$

Por tanto, la divergencia de J es en efecto, nula:

$$\partial_\nu J^\nu = iq\big[2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2) + \psi^*\Box\psi - \psi\Box\psi^*\big] = iq\big[2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2) - 2iq\partial^\mu(A_\mu|\psi|^2)\big] = 0$$

Q.E.D.

2.3. Entregable 16

Dado ψ espinor de Dirac ($\psi_\alpha, \psi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$), y recordando las definiciones de adjunto de Dirac $\bar\psi = \psi^*\gamma^0$, y de slash de Feynman $\not{K} = \gamma^\mu K_\mu$, obtener las ecuaciones dinámicas de ψ y $\bar\psi$ de la siguiente Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar\psi\gamma^\mu\psi) - m\bar\psi\psi$$

Comprobar que una de ellas es la ecuación de Dirac para ψ. Demostrar que es equivalente la Lagrangiana $\mathcal{L}_2 = \bar\psi(i\not{\partial} - m)\psi$, teniendo en cuenta que los campos se anulan en el infinito, $\psi\big|_{\partial\Omega} = 0$.

Tenemos que obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, primero la de ψ:

$$\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu\psi)} - \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial\psi} = 0 \tag{2.1}$$

Comenzamos con el primer término:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \psi)}\left[\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\nu \partial_\nu \psi\right] = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\nu \delta^\mu_\nu = \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu$$

Derivándolo:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \partial_\mu \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu = \frac{i}{2}\not{\partial}\bar{\psi}$$

Segundo término:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \psi}\left[-\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi\right] = -\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = -\frac{i}{2}\not{\partial}\bar{\psi} - m\bar{\psi}$$

Por tanto la primera ecuación dinámica es:

$$\frac{i}{2}\not{\partial}\bar{\psi} + \frac{i}{2}\not{\partial}\bar{\psi} + m\bar{\psi} = 0 \Rightarrow (i\not{\partial} + m)\bar{\psi} = 0 \tag{2.2}$$

Si nos fijamos bien, podemos ver que la Lagrangiana es la misma si la conjugamos, por tanto la segunda ecuación dinámica, la ecuación que se obtiene de Euler-Lagrange con $\bar{\psi}$, es la conjugada de la que acabamos de obtener (teniendo en cuenta que el γ^0 del $\bar{\psi}$ no es más que una matriz invertible, que por tanto podemos eliminar de la ecuación):

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0 \tag{2.3}$$

Que como habíamos anticipado en el enunciado, es la ecuación de Dirac.
Ahora queremos comprobar que la segunda Lagrangiana $\mathcal{L}_2$ proporcionada en el enunciado es equivalente a la primera $\mathcal{L}_1$. Para ello, lo que nos importa es que la acción correspondiente sea la misma, es decir, hay que demostrar:

$$\mathcal{S} = \int dt L = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}_1 = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}_2 \tag{2.4}$$

Partimos de la parte derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned}
\int dt \int d^3x\, \mathcal{L}_2 &= \int d^4x\, \left[\bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi\right] = i\int d^4x\, \bar{\psi}\not{\partial}\psi - \int d^4x\, m\bar{\psi}\psi \\
&= \frac{i}{2}\int d^4x\, \left[\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \bar{\psi}\not{\partial}\psi\right] - \int d^4x\, m\bar{\psi}\psi \\
&= \frac{i}{2}\int d^4x\, \left[\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \not{\partial}(\bar{\psi}\psi) - \psi\not{\partial}\bar{\psi}\right] - \int d^4x\, m\bar{\psi}\psi \\
&= \frac{i}{2}\int d^4x\, \not{\partial}(\bar{\psi}\psi) + \frac{i}{2}\int d^4x\, \left[\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \psi\not{\partial}\bar{\psi}\right] - \int d^4x\, m\bar{\psi}\psi \\
&= \frac{i}{2}\int d^4x\, \partial_\mu(\gamma^\mu \bar{\psi}\psi) + \int d^4x\, \left[\frac{i}{2}(\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \psi\not{\partial}\bar{\psi}) - m\bar{\psi}\psi\right] \\
&= \cancel{\frac{i}{2}\int_{\partial\Omega} d\Sigma_\mu\, \gamma^\mu \bar{\psi}\psi} + \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}_1 = \int dt \int d^3x\, \mathcal{L}_1
\end{aligned}$$

Donde hemos usado el Teorema de Gauss de la divergencia, y la condición de que los campos se anulan en el infinito.
Q.E.D.

2.4. Entregable 17

A partir de la ecuación de Heisenberg $i\partial_0\hat{\phi} = [\hat{\phi}, \hat{H}_0]$*, demostrar que* $\hat{\phi}$ *cumple la ecuación de Klein-Gordon* $(\Box + m^2)\hat{\phi}(\vec{x}, t) = 0$

Antes de empezar necesitamos dos cosas; por un lado el Hamiltoniano $\hat{H}_0$:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\int dx' \left(\hat{\Pi}^2 + (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2\right) \tag{2.1}$$

(*Nota: recordar que los operadores dentro de la integral están en función de las coordenadas espaciales $\vec{x}'$, no les pongo $'$ a cada uno para no liar los cálculos). Por otro lado necesitamos el conmutador de $\hat{\phi}$ con $\hat{\Pi}$:

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)\right] = i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \tag{2.2}$$

Comenzamos con la ecuación de Heisenberg, teniendo en cuenta que los 2 últimos términos del Hamiltoniano serán nulos por conmutar $\hat{\phi}$ consigo mismo:

$$\begin{aligned}
i\partial_0\hat{\phi} &= [\hat{\phi}, \hat{H}_0] = \frac{1}{2}\int dx' \left(\left[\hat{\phi}, \hat{\Pi}^2 + \cancel{(\vec{\nabla}\hat{\phi})^2} + \cancel{m^2\hat{\phi}^2}\right]\right) \\
&= \frac{1}{2}\int dx' \left[\hat{\phi}, \hat{\Pi}^2\right] = \frac{1}{2}\int dx' \left(\hat{\Pi}\left[\hat{\phi}, \hat{\Pi}\right] + \left[\hat{\phi}, \hat{\Pi}\right]\hat{\Pi}\right) \\
&= \int dx' \, \hat{\Pi} i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) = i\hat{\Pi}(\vec{x}, t) = i\partial_0\hat{\phi} \\
&\Rightarrow \partial_0\hat{\phi} = \hat{\Pi}
\end{aligned}$$

Como lo que buscamos es la ecuación de Klein-Gordon, que tiene un $\partial^0\partial_0\hat{\phi}$ dentro, hacemos esa operación:

$$\partial^0\partial_0\hat{\phi} = \eta^{\mu 0}\partial_\mu\partial_0\hat{\phi} = \partial_0\partial_0\hat{\phi} = \partial_0\hat{\Pi} = -i\left[\hat{\Pi}, \hat{H}_0\right] \tag{2.3}$$

Vamos a calcular, por tanto, el conmutador $\left[\hat{\Pi}, \hat{H}_0\right]$, de nuevo teniendo en cuenta que $\hat{\Pi}$ conmuta consigo mismo:

$$-i\left[\hat{\Pi}, \hat{H}_0\right] = -\frac{i}{2}\int dx' \left(\left[\hat{\Pi}, \cancel{\hat{\Pi}^2} + (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2 + m^2\hat{\phi}^2\right]\right) = -\frac{i}{2}\int dx' \,(A + B)$$

Haremos cada integral por separado y luego las juntaremos:

$$\begin{aligned}
A &\equiv \left[\hat{\Pi}, (\vec{\nabla}\hat{\phi})^2\right] = (\vec{\nabla}\hat{\phi})\left[\hat{\Pi}, \vec{\nabla}\hat{\phi}\right] + \left[\hat{\Pi}, \vec{\nabla}\hat{\phi}\right](\vec{\nabla}\hat{\phi}) \\
&= (\vec{\nabla}\hat{\phi})\vec{\nabla}\left[\hat{\Pi}, \hat{\phi}\right] + \vec{\nabla}\left[\hat{\Pi}, \hat{\phi}\right](\vec{\nabla}\hat{\phi}) = 2(\vec{\nabla}\hat{\phi})\vec{\nabla}\big(-i\delta(\vec{x}' - \vec{x})\big) \\
&= -2i\Big(\cancel{\vec{\nabla}\big((\vec{\nabla}\hat{\phi})\delta(\vec{x}' - \vec{x})\big)} - (\nabla^2\hat{\phi})\delta(\vec{x}' - \vec{x})\Big)
\end{aligned}$$

Donde hemos supuesto que el campo se anula en la frontera (∞), por lo que al integrar el primer término de la última línea, por el Teorema de Gauss de la divergencia ese término será nulo.
Por otro lado, tenemos la contribución de B:

$$B \equiv \big[\hat{\Pi}, m^2\phi^2\big] = m^2\big(\hat{\phi}\big[\hat{\Pi}, \phi\big] + \big[\hat{\Pi}, \phi\big]\hat{\phi}\big) = 2m^2\hat{\phi}(-i\delta(\vec{x}' - \vec{x}))$$

Por tanto, juntando ambos resultados y usando (3) obtenemos:

$$\begin{aligned} -i\big[\hat{\Pi}, \hat{H}_0\big] &= -\frac{i}{2}\int dx'\,(A + B) = \int dx'\,\Big((\nabla^2\hat{\phi})\delta(\vec{x}' - \vec{x}) - m^2\hat{\phi}\delta(\vec{x}' - \vec{x})\Big) \\ &= \nabla^2\hat{\phi}(\vec{x}, t) - m^2\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \partial^0\partial_0\hat{\phi}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Finalmente, juntando los tres términos en un lado, e indentificando el D'Alambertiano:

$$0 = \partial^0\partial_0\hat{\phi} - \nabla^2\hat{\phi} + m^2\hat{\phi} = \Box\hat{\phi} + m^2\hat{\phi} \Rightarrow \big(\Box + m^2\big)\hat{\phi} = 0 \tag{2.4}$$

Q.E.D.

2.5. Entregable 18

Demostrar las relaciones de conmutación entre $\hat{a}_k$ *y* $\hat{a}_k^\dagger$*:*

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 2E_k\delta(\vec{k} - \vec{k'})$$

Para comenzar vamos a utilizar el conmutador siguiente:

$$\big[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\Pi}(\vec{x}', t)\big] = i\delta(\vec{x}' - \vec{x}) \tag{2.1}$$

Expresamos el operador campo en términos de los operadores creación y destrucción:

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}\right) \tag{2.2}$$

Lo último que necesitaremos antes de empezar será utilizar el resultado obtenido en el entregable 17, que relaciona el operador campo con el operador momento conjugado (sin olvidar que, en unidades naturales $k_0 \equiv E_k$):

$$\hat{\Pi}(x) = \partial_0\hat{\phi} = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\left(\hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{a}_k^\dagger e^{ikx}\right) \tag{2.3}$$

Con esto ya podemos empezar a operar el conmutador (1):

$$
\begin{aligned}
[\hat{\phi},\hat{\Pi}] &= -i\Bigg[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left(\hat{a}_k e^{-ikx}+\hat{a}_k^\dagger e^{ikx}\right),\int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2}\left(\hat{a}_{k'}e^{-ik'x'}-\hat{a}_{k'}^\dagger e^{ik'x'}\right)\Bigg] \\
&= -i\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}\left[\hat{a}_k e^{-ikx}+\hat{a}_k^\dagger e^{ikx},\hat{a}_{k'}e^{-ik'x'}-\hat{a}_{k'}^\dagger e^{ik'x'}\right] \\
&= -i\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}\Big(\cancel{\left[\hat{a}_k,\hat{a}_{k'}\right]}e^{-i(kx+k'x')}-\left[\hat{a}_k,\hat{a}_{k'}^\dagger\right]e^{-i(kx-k'x')}+ \\
&\qquad\qquad +\left[\hat{a}_k^\dagger,\hat{a}_{k'}\right]e^{-i(k'x'-kx)}-\cancel{\left[\hat{a}_k^\dagger,\hat{a}_{k'}^\dagger\right]}e^{i(kx+k'x')}\Big)
\end{aligned}
$$

(*Notación: $x'\equiv(t,\vec{x}')$, ya que como tenemos el tiempo fijado, solo cambia la posición espacial)
Para proseguir, vamos a introducir las relaciones de conmutación propuestas en el enunciado, con tal que finalmente obtener la expresión derecha de (2.1). Pero antes vamos a introducir la fórmula de la representación integral de la Delta de Dirac (tridimensional), que aparecerá en el desarrollo posterior:

$$
\delta^{(3)}(\vec{\omega})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3t\, e^{-i\vec{\omega}\vec{t}} \tag{2.4}
$$

Continuamos:

$$
\begin{aligned}
[\hat{\phi},\hat{\Pi}] &= i\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}(2\pi)^3 2E_k\delta(\vec{k}-\vec{k}')\left(e^{-i(kx-k'x')}+e^{-i(k'x'-kx)}\right) \\
&= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}e^{-ik(x-x')}+i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}e^{-ik(x'-x)} \\
&= i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')}+i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}e^{-i\vec{k}(\vec{x}'-\vec{x})} \\
&= \frac{i}{2}\delta(\vec{x}'-\vec{x})+\frac{i}{2}\delta(\vec{x}-\vec{x}')=i\delta(\vec{x}'-\vec{x})
\end{aligned}
$$

Que es el resultado, previamente conocido, del conmutador (2.1), con lo que queda comprobado que el conmutador del enunciado tiene efectivamente esa expresión.
Q.E.D.

2.6. Entregable 19

Demostrar que $\hat{Q}=q\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}(\hat{n}_k-\hat{\bar{n}}_k)$

Para demostrarlo, vamos a partir de la siguiente igualdad:

$$
\hat{Q}=\int d^3x\, J^0=iq\int d^3x\left(\hat{\psi}^\dagger\partial^0\hat{\psi}-\hat{\psi}\partial^0\hat{\psi}^\dagger\right) \tag{2.1}
$$

Y también usaremos el conmutador del entregable 18 (que es idéntico para las $\hat{b}_k$):

$$[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}] = (2\pi)^3 2E_k \delta(\vec{k} - \vec{k'}) \tag{2.2}$$

Primero necesitamos las definiciones de $\hat{\psi}$ y $\hat{\psi}^\dagger$:

$$\hat{\psi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(\hat{a}_k e^{-ikx} + \hat{b}^\dagger_k e^{ikx}\Big); \quad \hat{\psi}^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(\hat{a}^\dagger_k e^{ikx} + \hat{b}_k e^{-ikx}\Big) \tag{2.3}$$

Y también sus derivadas temporales:

$$\partial^0\hat{\psi} = -i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(\hat{a}_k e^{-ikx} - \hat{b}^\dagger_k e^{ikx}\Big); \quad \partial^0\hat{\psi}^\dagger = i\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2}\Big(\hat{a}^\dagger_k e^{ikx} - \hat{b}_k e^{-ikx}\Big)$$

Introduciendo esto en la ecuación (2.1), y teniendo en cuenta que los operadores $\hat{a}$ y $\hat{b}$, junto con sus adjuntos, conmutan entre ellos.

$$\begin{aligned}\hat{Q} = q\int \frac{d^3xd^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}&\Big(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'}e^{i(k-k')x} - \cancel{\hat{a}^\dagger_k\hat{b}^\dagger_{k'}}e^{i(k+k')x} + \cancel{\hat{b}_k\hat{a}_{k'}}e^{-i(k+k')x} - \hat{b}_k\hat{b}^\dagger_{k'}e^{-i(k-k')x}\Big)\\ + q\int \frac{d^3xd^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}&\Big(\hat{a}_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{-i(k-k')x} - \cancel{\hat{a}_k\hat{b}_{k'}}e^{-i(k+k')x} + \cancel{\hat{b}^\dagger_k\hat{a}^\dagger_{k'}}e^{i(k+k')x} - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_{k'}e^{i(k-k')x}\Big)\end{aligned}$$

Para continuar, utilizamos las relaciones dadas por el conmutador (2.2) para los operadores creación y destrucción $\hat{a}, \hat{a}^\dagger; \hat{b}, \hat{b}^\dagger$; y las definiciones de los operadores número $\hat{n}$ y $\hat{\bar{n}}$

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k; \quad \hat{\bar{n}} = \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_k \tag{2.4}$$

Con esto, e identificando Deltas de Dirac como en el entregable anterior:

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= q\int \frac{d^3xd^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}\Big(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'}e^{i(k-k')x} - \hat{b}_k\hat{b}^\dagger_{k'}e^{-i(k-k')x} + \hat{a}_k\hat{a}^\dagger_{k'}e^{-i(k-k')x} - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_{k'}e^{-i(k-k')x}\Big)\\ &= q\int \frac{d^3kd^3k'}{(2\pi)^6 4E_k}(2\pi)^3\delta(\vec{k'} - \vec{k})\Big(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_{k'} - \hat{b}_k\hat{b}^\dagger_{k'} + \hat{a}_k\hat{a}^\dagger_{k'} - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_{k'}\Big)\\ &= q\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 4E_k}\Big(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_k + \cancel{(2\pi)^3 2E_k} + \hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k - \cancel{(2\pi)^3 2E_k} - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_{k'}\Big)\\ &= q\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(\hat{a}^\dagger_k\hat{a}_k - \hat{b}^\dagger_k\hat{b}_k\Big)\\ &= q\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\Big(\hat{n} - \hat{\bar{n}}\Big)\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7. Entregable 20

A partir de: $i\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \hat{H}U, \quad i\dfrac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t} = \hat{H}_0U_0$, *y de las relaciones:* $U = U_0U', \quad \hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}'$, *demostrar:*

$$i\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}t} = \hat{H}'_IU' \quad y \quad i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_I = \hat{H}'_I\left|\psi(t)\right\rangle_I$$

Para la primera igualdad:

$$\begin{aligned}
i\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= i\frac{\mathrm{d}(U_0U')}{\mathrm{d}t} = i\frac{\mathrm{d}U_0}{\mathrm{d}t}U' + iU_0\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}t} = \hat{H}_0U_0U' + iU_0\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}t} \\
\hat{H}U &= (\hat{H}_0 + \hat{H})U_0U' = \hat{H}_0U_0U' + \hat{H}'U_0U' \\
\Rightarrow \qquad & \cancel{\hat{H}_0U_0U'} + iU_0\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}t} = \cancel{\hat{H}_0U_0U'} + \hat{H}'U_0U' \\
\Rightarrow \qquad & i\frac{\mathrm{d}U'}{\mathrm{d}t} = U_0^{-1}\hat{H}'U_0U' = \hat{H}'_IU'
\end{aligned}$$

Nos falta por tanto, la segunda igualdad. Para ella necesitaremos saber cómo se definen los estados en la imagen de interacción:

$$\left|\psi(t)\right\rangle_I = U'(t,t_0)\left|\psi(t_0)\right\rangle \tag{2.1}$$

Con esto, sabiendo que $\left|\psi(t_0)\right\rangle$ es constante, y con la igualdad anterior:

$$\begin{aligned}
i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t)\right\rangle_I &= i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(U'\left|\psi(t_0)\right\rangle_I\big) = i\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}U'\Big)\left|\psi(t_0)\right\rangle + iU'\cancel{\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\psi(t_0)\right\rangle\Big)} \\
&= \hat{H}'_IU'\left|\psi(t_0)\right\rangle = \hat{H}'_I\left|\psi(t)\right\rangle_I
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Capítulo 3

Matriz S, secciones eficaces y anchuras de desintregración

3.1. Entregable 21

Una característica de ambos sistemas CM (centro de masas) y LAB (laboratorio), es que las velocidades de las dos partículas que colisionan son paralelas, $\vec{v}_1||\vec{v}_2$. Demostrar que, en este caso,

$$d\sigma = \frac{|T_{if}|^2}{4\sqrt{\left(P_1 \cdot P_2\right)^2 - m_1^2 m_2^2}} d^n LIPS$$

Partimos del resultado obtenido para el diferencial de sección eficaz en el caso general de una colisión entre dos partículas:

$$d\sigma = \frac{|T_{if}|^2}{4P_1^0 P_2^0 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} d^n LIPS \tag{3.1}$$

Para demostrar el resultado del enunciado, por lo tanto, solo necesitamos probar:

$$P_1^0 P_2^0 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = \sqrt{\left(P_1 \cdot P_2\right)^2 - m_1^2 m_2^2} \tag{3.2}$$

Para ello, vamos a usar la notación $E_1 \equiv P_1^0, E_2 \equiv P_2^0$, y el sistema CM, en el cual:

$$\begin{cases} P_1 &= (E_1, \vec{p}) \\ P_2 &= (E_2, -\vec{p}) \end{cases} \tag{3.3}$$

Por otro lado también conocemos la relación entre las masas y los cuadrimomentos:

$$P_1^2 = E_1^2 - |\vec{p}|^2 = m_1^2, \quad P_2^2 = E_2^2 - |\vec{p}|^2 = m_2^2 \tag{3.4}$$

Con esto podemos empezar la demostración. Comenzamos calculando el producto de ambos cuadrimomentos:

$$P_1 \cdot P_2 = E_1E_2 - \vec{p}_1\vec{p}_2 = E_1E_2 - |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\cos\theta$$

Con esto, y teniendo en cuenta que las velocidades de las partículas son paralelas, la parte derecha de la ecuación (2), elevada al cuadrado, queda:

$$\begin{aligned}
\big(P_1 \cdot P_2\big)^2 - m_1^2m_2^2 &= \big(E_1E_2 - |\vec{p}_1||\vec{p}_2|\big)^2 - m_1^2m_2^2 \\
&= E_1^2E_2^2 + |\vec{p}_1|^2|\vec{p}_2|^2 + 2E_1E_2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| - \big(E_1^2 - |\vec{p}_1|^2\big)\big(E_2^2 - |\vec{p}_2|^2\big) \\
&= \cancel{E_1^2E_2^2} + \cancel{|\vec{p}_1|^2|\vec{p}_2|^2} + 2E_1E_2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| - \cancel{E_1^2E_2^2} - \cancel{|\vec{p}_1|^2|\vec{p}_2|^2} \\
&\quad + E_2^2|\vec{p}_1|^2 + E_1^2|\vec{p}_2|^2 \\
&= 2E_1E_2|\vec{p}_1||\vec{p}_2| + E_2^2|\vec{p}_1|^2 + E_1^2|\vec{p}_2|^2 \\
&= E_1^2E_2^2\left(\frac{2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|}{E_1E_2} + \frac{|\vec{p}_1|^2}{E_1^2} + \frac{|\vec{p}_2|^2}{E_2^2}\right) \\
&= E_1^2E_2^2\left(\frac{|\vec{p}_1|}{E_1} + \frac{|\vec{p}_2|}{E_2}\right)^2 = (P_1^0)^2(P_2^0)^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2
\end{aligned}$$

Y así podemos ver fácilmente que la raíz de esto (ya que, como mencionamos antes, hicimos el cuadrado de la parte derecha de (2.2)) es el resultado que buscábamos, la parte izquierda de (2.2).

Q.E.D.

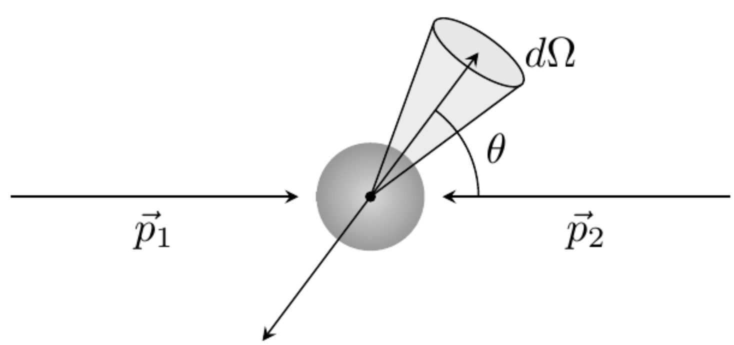


Figura 3.1: Ejemplo de una colisión elástica $2 \to 2$

3.2. Entregable 22

Con las definiciones utilizadas en el caso de la sección eficaz de un proceso $2 \to 2$, *demostrar:*

$$k_i = |\vec{k}| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2m_2^2}$$

Las definiciones previamente mencionadas son las siguientes:

$$s = (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2 = E_i^2 = E_f^2 \tag{3.1}$$

Por último, con las definiciones del momento $k_1 = (E_1, \vec{k})$ y $k_2 = (E_2, -\vec{k})$, sacamos las siguientes relaciones, que nos serán útiles:

$$\begin{cases} k_1k_2 & = & E_1E_2 + |\vec{k}|^2 \\ k_1^2k_2^2 & = & E_1^2E_2^2 + |\vec{k}|^4 - E_1^2|\vec{k}|^2 - E_2|\vec{k}|^2 \end{cases} \tag{3.2}$$

Con la primera igualdad de (3.1), y las definiciones de k_1, k_2 también podemos expresar s como:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2k_1k_2 \tag{3.3}$$

Si introducimos eso en la identidad a demostrar, y además la elevamos al cuadrado:

$$\begin{aligned} |\vec{k}|^2 &= \frac{1}{4s}\left[(\cancel{m_1^2 + m_2^2} + 2k_1k_2 - \cancel{m_1^2 - m_2^2})^2 - 4m_1^2m_2^2\right] \\ \Rightarrow \cancel{4}s|\vec{k}|^2 &= \cancel{4}(k_1k_2)^2 - \cancel{4}m_1^2m_2^2 \end{aligned}$$

Aquí se introduce la primera parte de (3.2):

$$\begin{aligned} s|\vec{k}|^2 &= \left(E_1E_2 + |\vec{k}|^2\right)^2 - m_1^2m_2^2 \\ &= E_1^2E_2^2 + |\vec{k}|^4 + 2E_1E_2|\vec{k}|^2 - m_1^2m_2^2 \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $k_1^2 = m_1^2$, y análogamente para k_2, además de usar la segunda parte de (3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} s\cancel{|\vec{k}|^2} &= E_1^2\cancel{|\vec{k}|^2} + E_2^2\cancel{|\vec{k}|^2}\cancel{-|\vec{k}|^4 + |\vec{k}|^4} + 2\cancel{|\vec{k}|^2}E_1E_2 \\ \Rightarrow s &= E_1^2 + E - 2^2 + 2E_1E_2 = (E_1 + E_2)^2 \end{aligned}$$

Por tanto el resultado al que hemos llegado tiene toda la coherencia posible, ya que es la propia definición de s.
Q.E.D.

3.3. Entregable 23

Demostrar que, para las variables de Mandelstam s, t, u, que son invariantes Lorentz, se cumple:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$$

Las variables de Mandelstam se escriben en términos de los cuadrivectores k_1, k_2, k_3, k_4 de la colisión de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s & = & (k_1 + k_2)^2 = (k_3 + k_4)^2 \\ t & = & (k_1 - k_3)^2 = (k_2 - k_4)^2 \\ u & = & (k_1 - k_4)^2 = (k_3 - k_2)^2 \end{array} \right. \tag{3.1}$$

Conocemos también la relación entre cualquiera de los cuadrivectores y su masa correspondiente:

$$k_i^2 = m_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{3.2}$$

Con esto, procedemos a la demostración (utilizando la primera igualdad de cada variable de Mandelstam, (3.1)):

$$\begin{aligned} s + t + u &= (k_1 + k_2)^2 + (k_1 - k_3)^2 + (k_1 - k_4)^2 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1k_2 - 2k_1k_3 - 2k_1k_4 \\ &= 3k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1(k_2 - k_3 - k_4) \end{aligned}$$

Aquí usamos la segunda igualdad de s: $-k_1 = k_2 - k_3 - k_4$:

$$\begin{aligned} s + t + u &= 3k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + 2k_1(-k_1) \\ &= k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nota: De aquí en adelante todos los ejercicios son ejercicios recomendados, pero no entregables

Capítulo 4

Cuantización canónica de campos fermiónicos

4.1. Ejercicio recomendado 1

Comprobar que el operador $\hat{\psi}_\alpha$ *satisface la ecuación de Dirac para operadores de campo:*

$$(i\not{\partial} - m)\,\hat{\psi} = 0$$

El operador campo fermiónico se define de la siguiente manera:

$$\hat{\psi}_\alpha(\vec{x}, t) = \sum_s \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left(u_\alpha(\vec{k}, s)\hat{b}(\vec{k}, s)e^{-ikx} + v_\alpha(\vec{k}, s)\hat{d}^\dagger(\vec{k}, s)e^{ikx} \right) \tag{4.1}$$

4.2. Ejercicio recomendado 2

Hallar las relaciones de conmutación/anticonmutación de los operadores creación y destrucción para partículas y antipartículas, no nulas:

$$\left[\hat{b}(\vec{k}, s), \hat{b}^\dagger(\vec{k}', s')\right] = \left[\hat{d}(\vec{k}, s), \hat{d}^\dagger(\vec{k}', s')\right] = (2\pi)^3 2E_k \delta_{s,s'} \delta(\vec{k} - \vec{k}')$$

4.3. Ejercicio recomendado 3

Expresar el hamiltoniano en términos de los operadores creación y destrucción de partículas y antipartículas:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\sum_s \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 E_k}\, E_k \left(\hat{b}^\dagger(\vec{k},s)\hat{b}(\vec{k},s) - \hat{d}(\vec{k},s)\hat{d}^\dagger(\vec{k},s)\right)$$