

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

4º DE FÍSICA

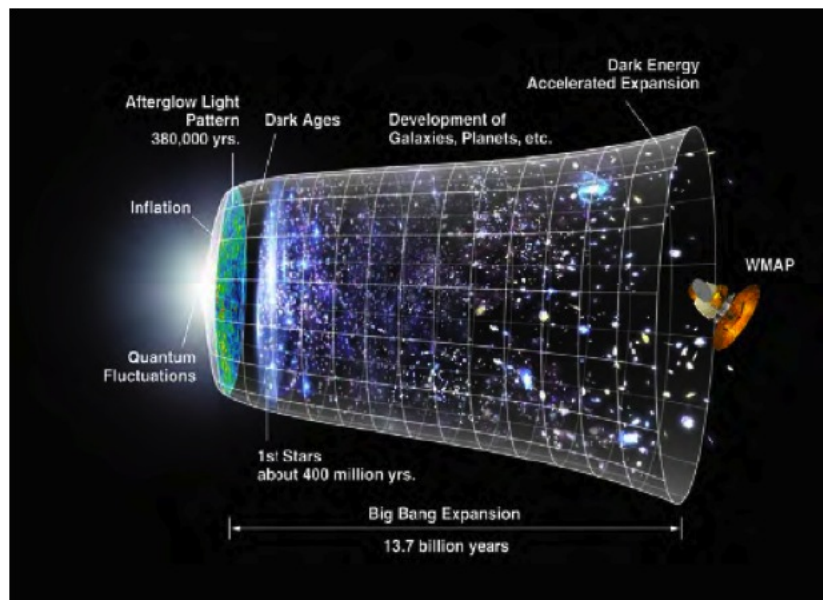
ITINERARIO DE FÍSICA FUNDAMENTAL

Cosmología

Autor:
Gonzalo CONTRERAS ASO

Profesor:
Juan José RAMÍREZ
MITTELBRUNN

23 de junio de 2017



Índice general

0. Introducción	4
0.1. Motivación y paradigma actual	4
0.2. Pilares del Modelo Cosmológico Estándar	5
1. Conceptos fundamentales	8
1.1. Relatividad General	8
1.2. El Universo observado a gran escala	10
1.3. Ley de Hubble	11
1.4. Composición del Universo	12
1.4.1. Parámetro de densidad	12
1.4.2. Evidencias de la existencia de materia oscura	13
2. Principio Cosmológico	15
2.1. Formulación matemática del principio cosmológico	16
2.2. Construcción de los espacios máximamente simétricos	19
2.3. Longitudes, áreas y volúmenes de circunferencias, discos y esferas	22
3. Cinemática cosmológica	24
3.1. Cosmografía (cinemática de la métrica de FLRW)	24
3.1.1. Ley de Hubble y desplazamiento al rojo	24
3.2. Distancia luminosidad	26
3.2.1. <i>Cosmic Distance ladder</i>	28
3.2.2. Relación exacta entre d_L y z	29
3.2.3. Módulo de distancia (μ):	29

3.3. Distancia diámetro angular	30
4. Dinámica cosmológica	32
4.1. Tensor energía-impulso	33
4.2. Ecuación de conservación	34
4.3. Ecuación de estado	35
4.4. Ecuación de Friedmann	36
4.4.1. Derivación newtoniana	37
4.5. Ecuación para la aceleración	37
4.5.1. Fondo cósmico de fotones	38
4.6. Dinámica cosmológica a tiempos cortos	40
4.6.1. Universos de Einstein-de Sitter	40
4.6.2. Modelo de de Sitter	42
4.7. Dinámica cosmológica completa	44
4.8. Igualdad dinámica entre materia y radiación	45
4.9. Modelo $\Lambda+m$	47
5. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar	49
5.1. Problema de la planaridad	49
5.1.1. Inflación como justificación de la planaridad	50
5.2. Problema del horizonte	51
5.2.1. Inflación como solución del problema del horizonte	52
6. Anexo: Materia Oscura	53
6.1. Introducción	53
6.2. Evidencias de materia oscura	53
6.3. Producción de materia oscura	54
6.4. Candidatos a materia oscura	56
6.5. <i>Dark Searches</i> : Búsquedas de materia oscura	57
6.6. Cálculo de abundancias de reliquias térmicas	58
6.7. Fondo cósmico de neutrinos	61

7. Ejercicios resueltos	62
7.1. Conceptos Fundamentales	62
7.2. Principio Cosmológico	62
7.3. Cinemática Cosmológica	65
7.4. Dinámica Cosmológica	66
7.5. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar	71

Notación y convenios

- En todo lo que sigue vamos a tener en cuenta el «convenio de sumación de Einstein», por el cual un término con un superíndice y un subíndice iguales llevará implícito un sumatorio sobre todos los posibles valores de ese índice.

$$\text{Ejemplo: } x^\mu p_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^4 x^\mu p_\mu$$

- Los índices griegos tendrán valores «cuatridimensionales», (0,1,2,3), mientras que los índices latinos tendrán valores únicamente espaciales, (1,2,3).
- Nuestra métrica será la métrica usada en los círculos de cosmología, que tendrá signatura $(-, +, +, +)$, siendo por ejemplo la de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. La razón de esto es que en esta asignatura es más útil obtener distancias positivas, al contrario que en cuántica que lo importante es que las energías sean positivas.
- Todos los cálculos se realizarán con la velocidad de la luz $c = 1$.

Capítulo 0

Introducción

0.1. Motivación y paradigma actual

- ¿Cuál es el tamaño y la geometría del Universo?
- ¿Cuál es la edad del Universo?
- ¿Cuál es su composición?
- ¿Cómo fue su origen, y como será su final?
- ¿Cómo se formó la materia que contiene el Universo?
- ¿Cuál es el origen de las estructuras que observamos?

Todas estas preguntas tienen algo en común: se preguntan acerca del Universo como un todo. La ciencia que trata de responder a estas y otras preguntas es la cosmología. Es la ciencia más antigua de todas, con diversas respuestas (más o menos místicas) en todas las culturas a lo largo de la historia.

Actualmente, la cosmología está en “auge”, ya que desde hace pocas décadas los datos cosmológicos eran escasos, y se basaba en prejuicios. Con la llegada de satélites, telescopios potentes, etc, la cosmología ha tomado fuerza, “guiada” en el marco del *Modelo Cosmológico Estándar* (SCM).

El Universo, por definición es toda realidad física existente, y como tal puede comprender a un conjunto de universos, a un multiverso, etc.

La cosmología, al contrario que otras ciencias, permite “ver pero no tocar”, ya que el Universo se puede observar, pero no se pueden cambiar por ejemplo las condiciones iniciales;

por esto se dice que la cosmología se basa en “observación y paradigma”, estableciendo modelos falsables (por eso es ciencia) que concuerdan con lo que observamos. Estos paradigmas están guiados, aun así, por prejuicios dominantes de la época, como por ejemplo el famoso “error” de Einstein con la constante cosmológica.

El Modelo Cosmológico Estándar comprende dos modelos: el *hot Big-Bang*, y la inflación. El Big-Bang es un término polisémico: por un lado, hace referencia al estado inicial del universo, como una singularidad (que es la acepción comúnmente conocida), y por otro lado está el “hot Big-Bang”, que es el estado físico de equilibrio térmico (energético, $E = k_B T$), entre protones, neutrones, neutrinos, fotones en equilibrio, a aproximadamente 10^{11} K, que posteriormente se enfrió hasta expandirse.

0.2. Pilares del Modelo Cosmológico Estándar

Actualmente sabemos que el universo tiene una edad de $t_0 = 13,7 \cdot 10^9$ yr (en cosmología el subíndice “0” significa presente, en este caso, es el tiempo actual). Esto es el tiempo transcurrido desde el Big-Bang. Pero, ¿qué tiempo es este? Este tiempo es el llamado “tiempo cósmico”: es el tiempo medido en el sistema de referencia de los observadores en reposo comovimiento; se explicará más adelante. A efectos prácticos son los observadores que ven una anisotropía dipolar nula en el fondo cósmico de microondas (CMB, *Cosmic Microwave Background*).

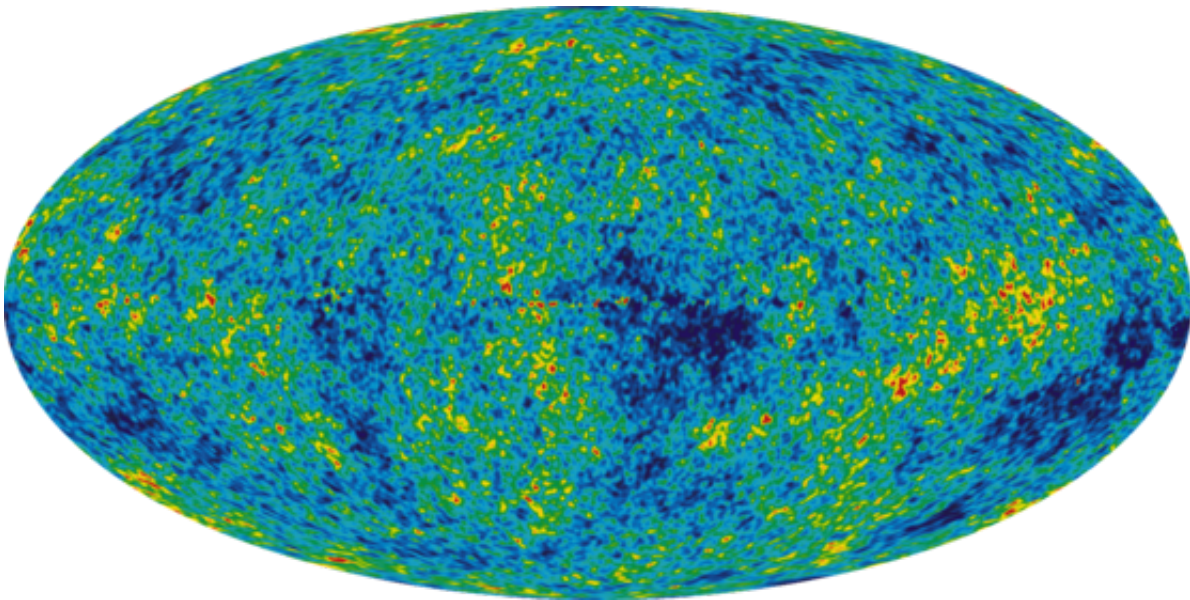


Figura 1: Anisotropías del CMB

Además, sabemos que el tamaño del Universo observable es de $d_H(t_0) = 14 - 15$ Gpc. Un parsec (pc) es una unidad de longitud usada en astronomía, viene de *parallax of 1 arc second*. Visualmente:

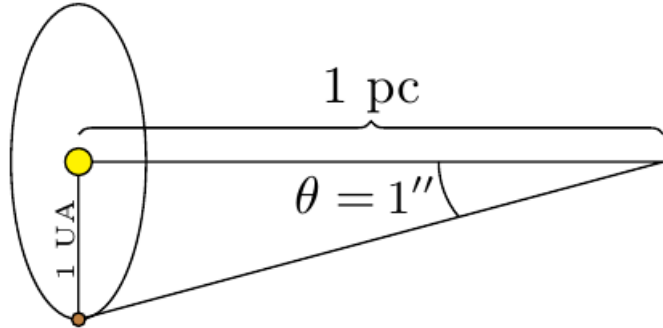


Figura 2: Definición de parsec.

(1 pc = 206,265 UA = 3,2616 años luz = $3,0857 \cdot 10^{13}$ km.)

En cosmología hay dos “finitudes”: hay un tiempo finito (desde el Big-Bang), y una velocidad máxima de transmisión de señales (velocidad de la luz). Esto implica que la luz ha tenido tiempo de llegar solo desde una cierta distancia. Este horizonte, llamado el “horizonte de partículas”, aumenta según pasa el tiempo, por eso d_H (distancia al horizonte) es una función del tiempo.

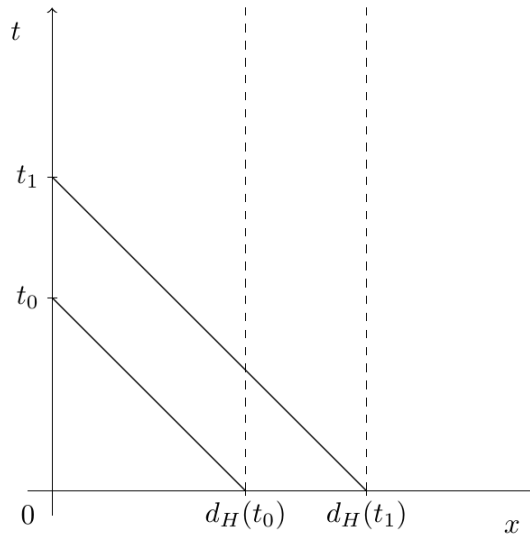


Figura 3: Avance de la distancia al horizonte de partículas.

Los pilares van a ser:

Relatividad General: Aunque la gravedad sea la interacción más débil de las cuatro fundamentales, a escalas cósmicas es la interacción dominante por su alcance.

Principio cosmológico: El Universo es homogéneo e isótropo. Hay evidencia observacional suficiente para establecer este principio.

Radiación de fondo cósmica: El CMB radia como un cuerpo negro muy preciso, con $T_0 = 2,73$ K, por esto es isótropo, pero tiene anisotropías, que se pueden tener en cuenta con los armónicos esféricos: $T(\theta, \varphi) = T_0 + \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

La isotropía es un gran apoyo para el principio cosmológico, y las anisotropías son las que posteriormente dan lugar a las estructuras que observamos, como galaxias y cúmulos.

Nucleosíntesis primordial y las abundancias de elementos ligeros ($^1\text{H}, ^2\text{D}, ^3\text{He}, ^7\text{Li}, \dots$):

La nucleosíntesis ocurre durante los tres primeros minutos, en los que se crean los primeros núcleos, una vez la temperatura disminuye hasta que su energía correspondiente sea menor que la energía por nucleón, del orden de pocos MeV.

Estudio del Universo a gran escala: La ley de Hubble, *Large Scale Structures* (LSS),...

Estos cinco pilares corresponden al modelo *hot Big-Bang* suplementado con una fase inicial de inflación. Esta fase ocurre durante las dos definiciones de Big-Bang, la singularidad (a tiempo de Planck), y el Big-Bang físico (a $\sim 10^{-5}$ s). Durante esta fase, el Universo experimenta un aumento rapidísimo de tamaño, del orden de $e^{50} - e^{70}$. Se introdujo para arreglar dos problemas, el problema de la planaridad y el del horizonte, que contaremos al final de la asignatura, a costa de introducir un campo escalar, el inflatón ϕ , acoplado a la gravedad. Esta teoría introduce fluctuaciones cuánticas durante la fase de la inflación, que podrían dar cuenta de las anisotropías del CMB.

Una vez hemos visto los pilares, ahora vamos a estudiarlos.

Capítulo 1

Conceptos fundamentales

Vamos a hacer un repaso a algunos de los conceptos y herramientas que se van a usar a lo largo del curso, y que influyen notablemente en la cosmología.

1.1. Relatividad General

Vamos a hacer un breve repaso. La relatividad general se basa en dos ideas:

1. El principio de equivalencia: Tiene dos versiones:

- Débil: La masa inercial es igual a la masa gravitatoria. Por tanto las trayectorias de los cuerpos no dependen de la masa inerte.
- Fuerte: Las leyes de la naturaleza son iguales para todos los observadores inerciales. Estos son los observadores en caída libre, es decir, los que siguen geodésicas.

Matemáticamente, el principio de equivalencia se implementa con la introducción del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$. En coordenadas localmente inerciales, la métrica es la Minkowskiana:

$$A \rightarrow \xi^A \begin{matrix} \text{coordenadas} \\ \text{localmente} \\ \text{inerciales} \end{matrix} \Rightarrow g_{\alpha\beta}(A) = \eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-, +, +, +)$$

Por otro lado necesitamos la conexión métrica, dada por los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}] \quad (1.1)$$

Esto implica que tenemos una derivada covariante para vectores covariantes y contravariantes:

$$\nabla_{\nu} A^{\mu} = \partial_{\nu} A^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} A^{\lambda} \quad (1.2)$$

$$\nabla_{\nu} A_{\mu} = \partial_{\nu} A_{\mu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} A_{\lambda} \quad (1.3)$$

El tensor que aportará la información de la curvatura es el tensor de Riemann:

$$R^{\lambda}_{\mu k \nu} = \partial_k \Gamma^{\lambda}_{\mu \nu} - \partial_{\nu} \Gamma^{\lambda}_{\mu k} + \Gamma^{\alpha}_{\mu \nu} \Gamma^{\lambda}_{\alpha k} - \Gamma^{\alpha}_{\mu k} \Gamma^{\lambda}_{\alpha \nu} \quad (1.4)$$

Se define el tensor de Ricci como la contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann: $R_{\mu \nu} = R^{\lambda}_{\mu \lambda \nu}$. Y a su vez la curvatura escalar se define como su traza: $R = g^{\mu \nu} R_{\mu \nu} = R^{\mu}_{\mu}$.

A partir de esto se define el tensor de Einstein: $G_{\mu \nu} = R_{\mu \nu} - \frac{1}{2} g_{\mu \nu} R$

2. Ecuaciones de Einstein: $G_{\mu \nu} = 8\pi G T_{\mu \nu}$

Donde $T_{\mu \nu}$ es el tensor energía-momento, simétrico y de divergencia nula: $\nabla_{\lambda} T_{\mu}^{\lambda} = 0$
La constante $8\pi G$ de las ecuaciones se fija para que en el límite de campo débil aparezca la ecuación de Poisson:

$$\left. \begin{array}{l} g_{00} \approx -(1 + 2\phi) \\ G_{00} = 2\nabla^2 \phi \end{array} \right\} 2\nabla^2 \phi = 8\pi G \rho \longrightarrow \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$$

Actualmente, el principio de equivalencia prevalece, pero constantemente se proponen modificaciones a las ecuaciones de Einstein, como puede ser la adición de terceras derivadas en límite de altas energías (teoría de cuerdas), o, lo que nos va a interesar a nosotros, ya que es esencial en cosmología, la adición de un término con la constante cosmológica Λ :

$$R_{\mu \nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu \nu} + \Lambda g_{\mu \nu} = 8\pi G T_{\mu \nu} \quad (1.5)$$

Fue introducida inicialmente por Einstein, para conseguir un universo estático, pero posteriormente ha reaparecido para dar cuenta de la expansión acelerada.

Hay otra posibilidad de introducirla, no como parte de la geometría, si no como parte de la energía:

$$R_{\mu \nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu \nu} = 8\pi G (T_{\mu \nu} + T_{\mu \nu}^{(\Lambda)}); \quad T_{\mu \nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu \nu}$$

Dependiendo de la magnitud de Λ , afectará o no al límite newtoniano, y esta magnitud es del orden de la densidad crítica del Universo:

$$\begin{aligned} \Lambda &\approx \rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} && \text{(a partir de las ecuaciones de Friedmann)} \\ \Rightarrow \Lambda &\approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3 && \rightarrow 6 \text{ protones/m}^3 \end{aligned}$$

Vamos a comparar esto con el Sistema Solar.

$$\frac{M_{\odot}}{\frac{4}{3}\pi(1\text{UA})^3} \approx \frac{M_{\odot}}{(1\text{UA})^3} = 0,59 \cdot 10^{-6} \text{ g/cm}^3$$

Como hay 23 órdenes de magnitud de diferencia, el efecto de la constante cosmológica en los tests clásicos de relatividad general será despreciable. Pero, en ese caso, ¿a qué escala será relevante Λ ? Según la métrica de Schwarzschild

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) d\tau^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (1.6)$$

Si tomamos $M = 0$ o $r \rightarrow \infty$, recuperamos la métrica de Minkowski (esférica). Para una corrección del 10% dada por Λ ,

$$\frac{10}{100} = \frac{2GM}{R} = \frac{2G}{R} \rho_{\text{crit}} R^3 \rightarrow R \approx 2,7 \text{ Gpc (distancia cosmológica)}$$

A partir de ahí, las correcciones son muy importantes.

El problema de la constante cosmológica

¿De dónde puede provenir esta contribución energética $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)}$? Una opción es considerarla una energía del vacío, que viene de los campos cuánticos. Puede ser la suma de las energías del estado de vacío. Si intentamos seguir este camino, va a diverger:

$$E_0 = \hbar\omega = \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow E_{\text{vacío}} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} E_0 = \frac{2\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} dp p^2 \sqrt{p^2 + m^2} \rightarrow \infty$$

Esto es válido hasta la masa de Planck, por tanto podemos acotar la integral:

$$\rho_{\text{vacío}} = \int_0^{P_{\text{Planck}}} dp \frac{p^2}{(2\pi\hbar)^3} 2\pi \sqrt{p^2 + m^2} = \frac{P_{\text{Planck}}}{16\pi^2\hbar^3} = \frac{10^{24} \text{ GeV}}{\hbar^3} = 2 \cdot 10^{91} \text{ g/cm}^3$$

ya que $P_{\text{Planck}} = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}} = 10^{19} \text{ GeV}$.

Por tanto, tenemos un error de 120 órdenes de magnitud. Λ no viene de la energía del vacío, ha de haber otra realidad física que la explique.

1.2. El Universo observado a gran escala

La distancia a la galaxia más cercana a nosotros (M31) es de:

$$d_{\text{M31}} = 0,78 \text{ Mpc}$$

En comparación con el horizonte de partículas: ($d_H = 15 - 14 \text{ Gpc}$),

$$d_H = 20000 d_{\text{M31}}$$

Las galaxias tienen una estructura irregular y filamentada. La homogeneidad aparece a los 100 Mpc (Principio cosmológico). Puede tener estructura fractal a menos de esa distancia. En el Universo observable hay aproximadamente 10^{11} galaxias. Nuestra galaxia forma parte del “grupo local”, y a su vez este es parte del *Cluster de Virgo* (~ 50 Mpc). El diámetro de la Vía Láctea es de 30 Kpc.

1.3. Ley de Hubble

Se observa que las líneas espectrales están desplazadas al rojo.

$$z = H_0 d; \quad 1 + z = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emi}}}$$

donde $z > 0$ es el *redshift*, y H_0 es la constante de Hubble, medida en tiempo⁻¹:

$$H_0 = 100h \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}} = 71 \pm 8 \frac{\text{km}}{\text{s Mpc}}, \quad \text{con } h = 0,71 \pm 0,08$$

Esto lo midió el HST (*Hubble Space Telescope*), con el que midieron la expansión acelerada del Universo.

El redshift se asemeja a una velocidad: $z = v = H_0 d \rightarrow H_0 = \frac{v}{d}$ es una ley lineal. Hubble pensó que esto era causa del efecto Doppler:

$$\frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{emi}}} = \frac{1 + v_r}{\sqrt{1 - v^2}}$$

donde v_r es la componente radial de la velocidad.

Esto tiene que ser igual a $1 + z$ en el límite no relativista.

$$1 + z = 1 + v_r \Rightarrow z = v_r$$

Esto no es el efecto Doppler. Aplicando el Teorema de Birkhoff, si cogemos el Universo, que es isótropo, tenemos Schwarzschild, pero si cogemos una esfera en el Universo hay poca masa, y por tanto es Minkowski, por eso funciona el Doppler a bajas velocidades. Si queremos calcular la edad del Universo:

$$H_0^{-1} = 13,6 \text{ Gyr}$$



Figura 1.1: *Hubble Space Telescope*

1.4. Composición del Universo

Denotamos la densidad de masa actual como ρ^0 . Tendrá una contribución de masa luminosa (aquella que interacciona con las ondas electromagnéticas), y otra de materia oscura:

$$\rho^0 = \rho_{\text{LM}}^0 + \rho_{\text{DM}}^0$$

1.4.1. Parámetro de densidad

Adimensional, es el cociente de la densidad con la densidad crítica:

Densidad crítica presente:

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878h^2 \cdot 10^{-29} = 0,94 \cdot 10^{-29} \text{g/cm}^3$$

Ejercicio: comprobar que esta densidad equivale a 6 protones/m³.

Parámetros de densidad:

$$\Omega_{\text{LM}} = \frac{\rho_{\text{LM}}^0}{\rho_c^0}, \quad \Omega_{\text{DM}} = \frac{\rho_{\text{DM}}^0}{\rho_c^0}$$

Cabe señalar que, aunque no pongamos el superíndice 0, se sobreentiende que son los parámetros actuales.

$$\rho_{\text{LM}}^0 = \text{densidad luminosa} \cdot \frac{M}{L}$$

La densidad luminosa es $\sim 2 \cdot 10^8 \frac{L_\odot}{\text{Mpc}^3}$, donde el subíndice \odot significa solar, y la segunda parte es la relación masa-luminosidad. Con astrofísica sabemos que

$$\frac{L}{L_\odot} \propto \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{3,5} \rightarrow \frac{M}{L} = 4 \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

Por tanto, $\rho_{\text{LM}}^0 = 8 \cdot 10^8 \frac{M_\odot}{\text{Mpc}^3} = 5 \cdot 10^{-32} \frac{g}{\text{cm}^3}$ Esto es la densidad de materia luminosa.

Con esto, podemos calcular $\Omega_{\text{LM}} = \frac{\rho_{\text{LM}}^0}{\rho_c^0} \approx 0,005$. El número tan bajo implica que la densidad de materia luminosa es mucho menos que la crítica ($\Omega_c = 1$), esto quiere decir que debe haber algo más, la materia oscura.

1.4.2. Evidencias de la existencia de materia oscura

Curvas de rotación

En órbita circular: $\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM(r)}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}}$

Dentro de las galaxias $M(r) \propto r^3$, y la masa va con el volumen, por tanto $v \propto r$. Fuera de la galaxia $M(r) = cte$, por tanto $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$.

Gráficamente, si representamos la velocidad respecto al radio:

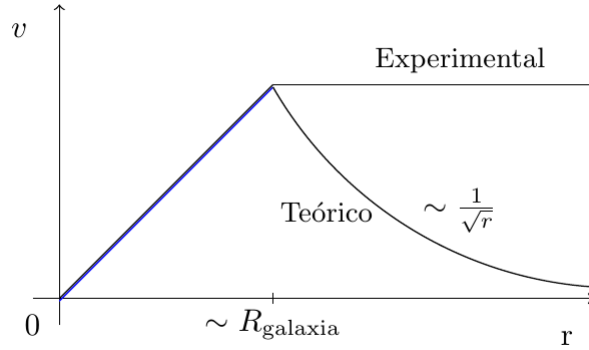


Figura 1.2: Resultados esperados vs datos experimentales de las curvas de rotación

Teoría y experimentos no encajan. Existe un halo de materia oscura, con $R_{\text{halo}} \approx R_{\text{galaxia}}$. Para que $v(r) \simeq cte$ fuera, $M(r)_{\text{halo}} \propto r$, por tanto $\rho_{\text{halo}}(r) \propto \frac{1}{r^2}$

Teorema del Virial

Cúmulo virializado de galaxia, cumple el teorema del Virial: $\langle T \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle$

$$T = \frac{1}{2} m_{\text{gal}} v^2, \quad U = -G \frac{m_{\text{gal}} m_{\text{cumulo}}}{r} \Rightarrow \langle v^2 \rangle = -G m_{\text{cumulo}} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$$

Calculando esta velocidad cuadrática media, se puede obtener la masa del cúmulo, que resulta ser mucho mayor de lo observado.

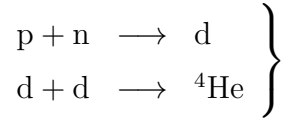
CMB y diagrama de Hubble de SN IA

Debemos tener aproximadamente $\Omega_{\text{tot}} \simeq 1$. Como $\Omega_{\text{LM}} \simeq 0,005$, hay un 99.5% de algo más, que son la energía oscura y la materia oscura:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\text{DM}} \simeq 0,28 \\ \Omega_{\text{DE}} \simeq 0,715 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{“Quintaesencia”} \\ \text{Constante cosmológica} \end{array} \right. \quad \rho_{\Lambda} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

$\rho_{\Lambda} \simeq 0,7\rho_c^0 = 10^{-44}\text{eV}^4$. Escala absurda para la física fundamental.

Vamos a tener en cuenta la materia ordinaria, es decir, la bariónica (formada por protones y neutrones). Por un lado tenemos nubes de H_2 molecular (que no se ven porque están “frías”), y por otro lado glóbulos machos (enanas marrones). La nucleosíntesis pone una cota a la cantidad de materia bariónica que puede haber.



El deuterio (d) está muy débilmente ligado, por tanto forma un “cuello de botella”. La presencia de deuterio en el Universo dependerá de la eficiencia de la reacción $\text{d} + \text{d} \longrightarrow {}^4\text{He}$. Si fuera 100% eficiente, no quedaría deuterio. Sin embargo, se observan trazas de deuterio. La eficiencia depende de ρ_{barion} , por lo que la nucleosíntesis pone una cota a Ω_{barion} :

$$\text{Big-Bang nucleosynthesis} \rightarrow \Omega_{\text{barion}} = \frac{\rho_{\text{barion}}^0}{\rho_c^0} = 0,04$$

La materia oscura no bariónica se denomina *cold dark matter*:

$$\Omega_{\text{DM}} \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\text{CDM}} = 0,24 \\ \Omega_{\text{B}} = 0,04 \end{array} \right. \quad \Omega_{\text{DM}} + \Omega_{\Lambda} = \Omega_{\text{tot}} \simeq 1$$

Candidatos a materia oscura: Neutralino, axión,... (se contará más en el anexo de materia oscura al final de la asignatura).

Capítulo 2

Principio Cosmológico

El principio cosmológico es la base de todos los modelos del Universo. Establecido por Einstein (1917) y después por Milne (1935):

El Universo es homogéneo e isótropo entorno a cualquier posición

El Universo por tanto, tiene las simetrías del grupo euclídeo (traslaciones implica homogeneidad, y simetría implica isotropía), siempre refiriéndonos a secciones espaciales.

¿Por qué se postula esto?

- Hay evidencias observacionales:
 - Fuentes de radio
 - CMB (Temperatura media de 2.73K, con variaciones mínimas)
 - Mapas de galaxias, llegan hasta los 600 Mpc. Las fluctuaciones de densidad $\frac{\delta\rho}{\rho}$ son muy pequeñas a 400 Mpc, del orden de 0.1.
 - Las anteriores son demostraciones de isotropía, la homogeneidad es más difícil de observar.
- Principio de Copérnico: no ocupamos una posición especial en el Universo. Debemos pensar que hay isotropía para todo observador. Teorema de geometría: Todo espacio isótropo en todo punto es homogéneo.

El CMB es un residuo térmico isótropo. ¿Proviene de equilibrio térmico? La respuesta es que sí. Hay evidencia observacional del equilibrio térmico, y se pueden hacer predicciones sin tener en cuenta las condiciones iniciales.

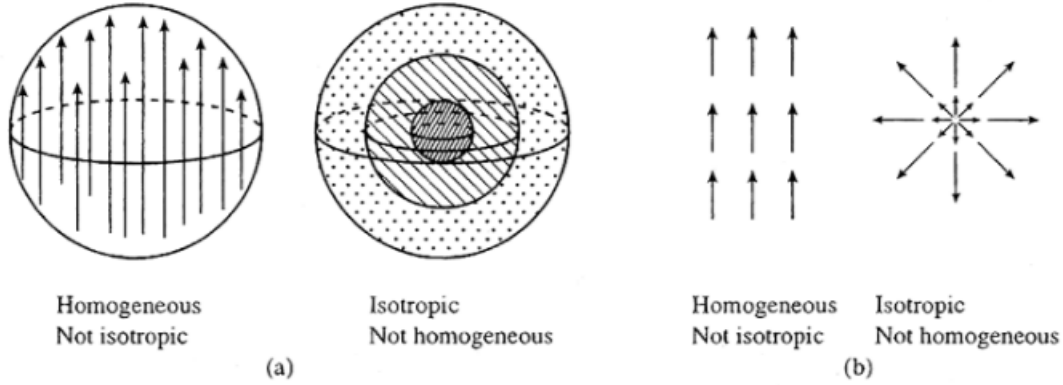


Figura 2.1: Ejemplos de diferencia entre isotropía y homogeneidad en a) 3 dimensiones y b) 2 dimensiones.

Ejemplo: ¿Cuánto helio hay en el Universo? ($N_n \equiv n^\circ$ de neutrones, $N_p \equiv n^\circ$ de protones)

$$\frac{N_n}{N_p} = \frac{e^{-m_n/kT}}{e^{-m_p/kT}} = e^{-(m_n - m_p)/kT}$$

La temperatura a la que empieza la nucleosíntesis es $kT = 0,7\text{MeV}$:

$$\Rightarrow \frac{N_n}{N_p} \simeq \frac{1}{6,4} \simeq \frac{1}{7}$$

Eso son aproximadamente 7 protones por cada neutrón.

$$\Rightarrow 7p \text{ por } 2n \rightarrow 1^4\text{He} + 12p \rightarrow 12\text{H}^+ + 1\text{He}$$

Como el helio pesa cuatro veces más, debe haber un 25% (en peso). Esto se comprueba observacionalmente a la perfección.

2.1. Formulación matemática del principio cosmológico

Coordenadas comovimiento: Suponemos una cierta métrica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. En un tiempo arbitrario, por simplicidad a $t = 0$, definimos un sistema de coordenadas, en las secciones espaciales correspondientes a la línea del Universo del observador. Los observadores en reposo en estas coordenadas son observadores comovimiento. Veamos cómo es el elemento de línea, por construcción.

$$\text{Como } d\tau^2 = dt^2 = -g_{00}dt^2 \Rightarrow g_{00} = -1 \text{ (por construcción).}$$

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + 2g_{0i}dtdx^i + g_{ij}dx^i dx^j$$

Para estos observadores, con $\vec{x} = cte$ y $t = \tau$, en caída libre han de satisfacer la ecuación de las geodésicas:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (2.1)$$

■ Parte espacial: $\lambda = i \rightarrow \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$

$$\Rightarrow \Gamma^i_{00} \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_1 \underbrace{\frac{dt}{d\tau}}_1 + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} = 0 \Rightarrow \Gamma^i_{00} = 0$$

Esto implica que: $\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2} g^{i\rho} (\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}) = g^{ij} \partial_0 g_{0j} = 0$

Y de esto se deduce que: $g_{0j} \neq g_{0j}(t)$

■ Parte temporal: $\lambda = 0 \rightarrow \frac{d^2 t}{d\tau^2} + \Gamma^0_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, obtenemos que $\Gamma^0_{00} = 0$, lo cual no nos impone nuevas condiciones sobre la métrica.

Ahora vamos a cambiar el tiempo de la siguiente forma: $t' = t + f(\vec{x})$, simplemente cambiando el origen, y no el ritmo.

Transformamos la métrica: $g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$

Ejercicio: Comprobar $g'_{00} = g_{00} = -1$, $g'_{0i} = g_{0i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}$

Por tanto, podremos elegir una función f que cumpla $g_{0i} + \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, que no siempre existirá, eso dependerá de la métrica, de la cual todavía no sabemos nada. Pero para el caso de una métrica isótropa, es posible siempre. Por tanto, ya tenemos la forma final de una métrica isótropa, en coordenadas comovimiento, en la que el tiempo medido por los observadores comovimiento (en general, las galaxias) es el tiempo cósmico:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

Las velocidades de los objetos en estas coordenadas se llaman “velocidades peculiares”, $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$, son las velocidades respecto a los observadores comovimiento.

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1 + v \cos \theta; \quad \frac{T'}{T} = \frac{1}{1 + v \cos \theta} \simeq 1 - v \cos \theta$$

$$\rightarrow T' = T(1 - v \cos \theta) \rightarrow \frac{\Delta T'}{T} = -v \cos \theta$$

Este es el origen de la anisotropía cinemática del CMB, debido a la velocidades peculiar de la Tierra, respecto a observadores comovimiento. De hecho la traslación terrestre, alrededor del Sol, causa una modulación anual de esta anomalía.

Principio cosmológico (matemáticamente): g_{ij} es la métrica de un espacio máximamente simétrico.

Espacios máximamente simétricos Aquellos que tiene el mismo número de simetrías que el espacio euclídeo, o, equivalentemente aquel con el máximo número de Killings posible.

Los vectores de Killing ξ son las isometrías de la métrica, es decir, aquellos a lo largo de cuyo flujo la derivada de Lie de la métrica se anula:

$$\mathcal{L}_\xi g_{\alpha\beta} = -\xi^\rho \partial_\rho g_{\alpha\beta} - (\partial_\alpha \xi^\mu) g_{\mu\beta} - (\partial_\beta \xi^\mu) g_{\alpha\mu} = -\nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$$

Ejercicio: Con $\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu = R^\rho_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$; y usando la propiedad cíclica del tensor de Riemann, obtener $\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda = 0$

$$\Rightarrow \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\lambda = R^\rho_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$$

Es una ecuación lineal y de segundo orden satisfecha por un vector de Killing. El número máximo de soluciones a esta ecuación, mirando los grados de libertad, es:

Ligaduras de Killing, condiciones iniciales	→	Grados de libertad
$\xi_\mu(\rho)$	→	D
$\nabla_\nu \xi_\mu(\rho)$	→	$\frac{D(D-1)}{2}$

Por tanto, en un espacio máximamente simétrico hay $D + \frac{D(D-1)}{2} = \frac{D(D+1)}{2}$ vectores de Killing. También podemos decir que es homogéneo e isótropo respecto a cada punto. Para un espacio máximamente simétrico tenemos las siguientes propiedades:

- $R_{\rho\lambda\mu\kappa} = \frac{R}{D(D-1)} (g_{\rho\mu}g_{\lambda\kappa} - g_{\rho\kappa}g_{\lambda\mu})$ → Es decir, que toda la información la aporta la curvatura escalar.
- $R_{\lambda\kappa} = \frac{1}{D} g_{\lambda\kappa} R$ → La curvatura escalar, además, será constante (si no no sería homogéneo). Se suele escribir de la forma $R = D(D-1)\kappa$, dado que en dimensión $D = 2$, se reduce a la curvatura de Gauss (κ).

Teorema 1 (Unicidad de los espacios máximamente simétricos) : *Si dos espacios con métricas $g_{\mu\nu}(x)$ y $g'_{\mu\nu}(x)$ son máximamente simétricos, con la misma signatura, y la misma curvatura $\kappa = \kappa'$, los dos espacios son equivalentes en el sentido de que se puede pasar de $g_{\mu\nu}$ a $g'_{\mu\nu}$ mediante una transformación de coordenadas.*

2.2. Construcción de los espacios máximamente simétricos

Como hemos visto previamente, un espacio máximamente simétrico faltaría por ser definido en sus secciones espaciales, es decir, su g_{ij} , ya que los demás términos de la métrica son ya conocidos.

1. $\kappa = 0$: Este es el espacio euclídeo D -dimensional, con secciones espaciales $ds^2 = d\vec{x}^2$. Se le puede introducir un término $a^2(t)$, de forma que $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2$.

En coordenadas cartesianas: $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$, $\delta_{ij} = \gamma_{ij}$

En coordenadas esféricas: $ds^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ (secciones espaciales)

$$\Rightarrow ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]$$

2. $\kappa > 0$: Por construcción, la variedad, y la métrica son invariantes bajo el grupo de rotaciones $SO(D+1)$:

$$y_1^2 + \dots + y_D^2 + y_{D+1}^2 = a^2$$

donde $a \equiv \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$. Redefiniendo las variables de la siguiente manera: $x_i = y_i/a$, $z = y_{D+1}/a$,

de forma que la esfera queda como $\vec{x}^2 + z^2 = 1$. Esto es una ligadura, que nos permitirá despegar dz en función del resto:

$$2\vec{x} \cdot d\vec{x} + 2zdz = 0 \Rightarrow dz^2 = \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{z^2} = \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - \vec{x}^2} = \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - r^2}$$

. La métrica espacial será, con esto:

$$ds^2 = a^2(t) (dx_1^2 + \dots + dx_D^2 + dz^2) = a^2(t) \left(d\vec{x}^2 + \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 - r^2} \right) = a^2\gamma_{ij}dx^i dx^j$$

Por tanto los elementos de la métrica (salvo factor de escala) vendrán dados por:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - r^2}$$

Ejercicio: Comprobar que $\gamma^{ij} = (\delta^{ij} - x^i x^j)$

- Caso de $D = 2$: $d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Teniendo en cuenta que $r^2 = \vec{x}^2 \Rightarrow r dr = \vec{x} d\vec{x}$.

$$ds^2 = a^2 \left(dr^2 + r^2 d\varphi^2 + \frac{r^2 dr^2}{1 - r^2} \right) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Si hacemos el cambio $r = \sin \theta$, $dr = \cos \theta d\theta$, entonces $\frac{dr^2}{1 - r^2} = d\theta^2$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

Esta es la métrica característica de la 2-esfera (2S). Con esto vemos explícitamente que el espacio máximamente simétrico (al menos en $D = 2$) es la esfera.

- Caso de D=3: $d\vec{x}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. De la misma forma que en el caso anterior, llevamos a:

$$ds^2 = a^2 \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{r^2 dr^2}{1 - r^2} \right] = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

Esta es la métrica de la 3-esfera (S^3). Vamos a introducir ahora la coordenada χ , que nos acompañará el resto del curso. Hacemos un cambio de variable análogo: $r = \sin \chi$, $dr = d\chi \cos \chi$

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

Las componente en “cartesianas” son:

$$x_1 = \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad x_2 = \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad x_3 = \sin \chi \cos \theta, \quad x_4 = \cos \chi$$

3. $\kappa < 0$: Antes, para $\kappa > 0$ simplemente embebimos una hipersuperficie en un espacio euclídeo una dimension mayor. En este caso, eso no funciona, hay que embeber un hiperboloide en un espacio de Minkowski:

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{a}}, \quad z^2 - \vec{x}^2 = 1, \quad ds^2 = a^2(d\vec{x}^2 - dz^2)$$

$$\Rightarrow ds^2 = a^2 \left(d\vec{x}^2 - \frac{(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2}{1 + r^2} \right) = a^2 \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{1 + r^2} \right) dx^i dx^j = a^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

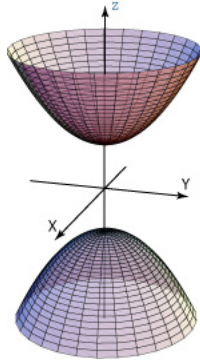


Figura 2.2: Hiperboloide de dos hojas

Por construcción, el espacio es máximamente simétrico, ya que la variedad y la métrica son invariantes bajo el grupo de rotaciones hiperbólicas $SO(D, 1)$, que es el grupo de Lorentz.

- Caso de D=2: Esto va a ser lo que se conoce como el “plano de Lovachevski”:

$$ds^2 = a^2 \left(dr^2 + r^2 d\varphi^2 - \frac{r^2 dr^2}{1+r^2} \right) = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Con el cambio $r = \sinh \chi$:

$$ds^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\varphi^2)$$

- Caso de D=3:

$$ds^2 = a^2 \left[dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{r^2 dr^2}{1+r^2} \right] = a^2 \left[\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

Que, con el cambio de variable del caso anterior:

$$ds^2 = a^2 [d\chi^2 + \sinh^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

Con esto ya podemos introducir la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW).

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

El factor de escala a puede depender del tiempo, ya que solo hemos pedido que el espacio sea homogéneo en las secciones espaciales, a tiempo constante. La constante k tendrá valor $+1$ para espacio de curvatura $\kappa > 0$, será 0 para espacio euclídeo de curvatura $\kappa = 0$, y valdrá -1 para curvatura $\kappa < 0$. Con un cambio de variable, podemos escribir esta métrica como:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

donde hemos introducido la función S_k :

$$S_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & (k = +1) \\ \chi & (k = 0) \\ \sinh \chi & (k = -1) \end{cases}$$

Ejercicio: Para un espacio máximamente simétrico, comprobar que la conexión espacial tiene la siguiente forma: $\Gamma^i_{jk} = k \frac{1}{a^2} x^i g_{jk}$

La ecuación de las geodésicas (espaciales) es:

$$0 = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + k \frac{1}{a^2} x^i g_{jk} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2} + k \frac{1}{a^2} ds^2 \overbrace{\frac{1}{ds} \frac{1}{ds}}^1$$

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + k \frac{x^i}{a^2} = 0 \begin{cases} x^i = A^i \sin\left(\frac{s}{a}\right) + B^i \cos\left(\frac{s}{a}\right) & (k = +1) \\ x^i = A^i \sinh\left(\frac{s}{a}\right) + B^i \cosh\left(\frac{s}{a}\right) & (k = -1) \end{cases}$$

El caso euclídeo es trivial, las geodésicas son rectas.

2.3. Longitudes, áreas y volúmenes de circunferencias, discos y esferas

Las métricas para $D = 2$ y $D = 3$ son:

$$D = 2 \quad ds^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\varphi^2 \right) = a^2 (d\chi^2 + S_k^2(\chi) d\varphi^2)$$

$$D = 3 \quad ds^2 = a^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] = a^2 [d\chi^2 + S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]$$

- Distancia, centrada en $r = 0$ (con θ, φ fijos):

$$d(r) = \int_0^r ds = a \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = a S_k^{-1}(r) = a\chi(r) \Rightarrow \chi = \frac{d}{a}$$

- Circunferencia, de radio d :

$$l(d) = \int_0^{2\pi} ar d\varphi = 2\pi ar = 2\pi a S_k \left(\frac{d}{a} \right) = \begin{cases} 2\pi a \sin \left(\frac{d}{a} \right) & (k = 1) \\ 2\pi d & (k = 0) \\ 2\pi a \sinh \left(\frac{d}{a} \right) & (k = -1) \end{cases}$$

$x \geq 0 \Rightarrow \sin x \leq x$ (menos longitud), $\sinh x \geq x$ (más longitud).

- Área de un disco, centrado en $r = 0$, de radio d , con θ fijado:

$$A(d) = \int_0^r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\tilde{g}} = \int_0^{d/a} d\chi \int_0^{2\pi} d\varphi a^2 S_k(\chi) = 2\pi a^2 \begin{cases} 1 - \cos \left(\frac{d}{a} \right) & (k = 1) \\ \frac{d^2}{2a^2} & (k = 0) \\ \cosh \left(\frac{d}{a} \right) - 1 & (k = -1) \end{cases}$$

- Área de una esfera, centrada en $r = 0$, de radio d , teniendo en cuenta que \hat{g} es la métrica bidimensional sobre la esfera $d\hat{s}^2 = a^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = a^2 S_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$.

$$S(d) = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\hat{g}} = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^2 S_k^2(\chi) \sin \theta = 4\pi a^2 \begin{cases} \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) & (k = 1) \\ \frac{d^2}{a^2} & (k = 0) \\ \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) & (k = -1) \end{cases}$$

- Volúmen de una esfera de radio d .

$$\begin{aligned}
 V(d) &= \int_0^{d/a} d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{g} = \int_0^{d/a} d\chi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi a^3 S_k^2(\chi) \sin \theta = \\
 &= \begin{cases} 2\pi a^3 \left[\frac{d}{a} - \frac{1}{2} \sin^2 \left(\frac{d}{a} \right) \right] & (k = 1) \\ \frac{4\pi d^3}{3} & (k = 0) \\ 2\pi a^3 \left[\frac{1}{2} \sinh^2 \left(\frac{d}{a} \right) - \frac{d}{a} \right] & (k = -1) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Cinemática cosmológica

3.1. Cosmografía (cinemática de la métrica de FLRW)

Sin más hipótesis que el principio de equivalencia y el principio cosmológico, vamos a ver qué podemos deducir, utilizando la métrica de FLRW, que es la que se deduce naturalmente de ambos principios.

Definimos primero la distancia física o propia, como aquella medida por la métrica. Esto es necesario puesto que luego habrá más nociones de distancia diferentes.

Definimos también el tiempo conforme, como: $\eta(t) = \int \frac{dt'}{a(t')} \rightarrow a(\eta)d\eta = dt$

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] = a^2(\eta) \left[-d\eta^2 + d\chi^2 + S_k^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right]$$

(Notación: de ahora en adelante, $\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}$, $f' \equiv \frac{df}{d\eta}$)

3.1.1. Ley de Hubble y desplazamiento al rojo

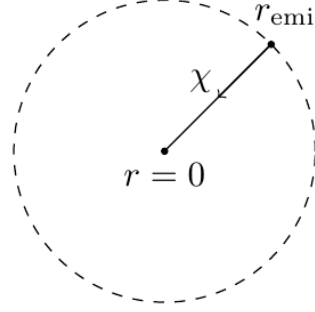
Vamos a explicar ambos sin hipótesis adicionales, como consecuencia de la métrica de FLRW.

$$d(r_1, t) = a(t)\chi(r_1), \quad \chi(r_1) = S_k^{-1}(r_1) = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}$$
$$v(r_1, t) = \frac{\partial d(r_1, t)}{\partial t} = \dot{a}(t)\chi(r_1) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}a(t)\chi(r_1) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d(r_1, t)$$

$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \equiv H(t)$ es el parámetro de Hubble $\rightarrow v(r_1, t) = H(t)d(r_1, t)$ es la Ley de Hubble (teórica). La ley de Hubble teórica tiene un problema, que no se puede medir la distancia propia. Por eso, más adelante introduciremos las otras “distancias medibles”.

Vamos ahora a estudiar el redshift cosmológico. Suponemos un rayo de luz (por tanto, con $ds^2 = 0$) a φ, θ fijos: $d\eta^2 = d\chi^2 \rightarrow d\eta = \pm d\chi$, donde + significa el rayo alejándose, y el - lo contrario.

$$\begin{aligned} \eta_1, & \quad \eta_0 = \eta_1 + \chi, \\ \eta_1 = \Delta\eta_{emi}, & \quad \eta_0 + \Delta\eta_{obs} = \eta_1 + \Delta\eta_{emi} + \chi \\ \left. \begin{aligned} a(t_0)\Delta\eta_{obs} &= \Delta t_{obs} \\ a(t_1)\Delta\eta_{emi} &= \Delta t_{emi} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta\eta_{obs} = \Delta\eta_{emi} \end{aligned}$$



Los tiempos conformes serán iguales, pero los cósmicos no, por el factor $a(t)$ de escala.

Vamos a ver la relación entre las longitudes de onda observada y emitida, partiendo de las frecuencias, hasta obtener z , el redshift.

$$\frac{\nu_{obs}}{\nu_{emi}} = \frac{\Delta t_{emi}}{\Delta t_{obs}} = \frac{a(t_1)\Delta\eta_{emi}}{a(t_0)\Delta\eta_{obs}} \Rightarrow \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emi}} = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} = 1 + z$$

Figura 3.1: Esquema de la situación.

Podemos ver entonces, que el tiempo es una función del redshift, $t = t(z)$. Por esto, se puede definir el *look back time* como $t_0 - t_1$.

$$\text{Para } \begin{cases} z = 0 & \Rightarrow t = t_0 \\ a(t) = 0 & \Rightarrow t = 0 \rightarrow z = \infty \end{cases}$$

Vamos ahora a hacer una aproximación del redshift para objetos cercanos, es decir, para distancias de $r_1 \ll 1$:

$$d(r_1, t_0) = a(t_0)\chi(r_1) = a(t_0)S_k^{-1}(r_1) \simeq a(t_0)r_1$$

La velocidad de recesión, a primer orden, será:

$$v_r \simeq \dot{a}(t_0)r_1 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} a(t_0)r_1 = H_0 a(t_0)r_1 = H_0 d(r_1, t_0)$$

$$z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)} - 1 = \frac{a(t_0)}{a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \dots} - 1 = \frac{1}{1 + H_0(t_1 - t_0)} - 1$$

Usando Taylor, a primer orden: $z = 1 - H_0(t_1 - t_0) + \dots - 1 \Rightarrow z = H_0(t_0 - t_1)$.

$$\text{Por otro lado, } t_0 - t_1 = \left. \frac{dt}{d\eta} \right|_{t=0} (\eta_0 - \eta_1) = a(t_0)(\eta_0 - \eta_1) = a(t_0)\chi(r_1) \simeq a(t_0)r_1$$

$$z = H_0 d_1$$

A velocidades pequeñas, el redshift coincide con la velocidad. Con esto ya podemos medir la velocidad de la ley de Hubble, para comprobarlo. Nos falta la distancia, tenemos que encontrar “distancias medibles”:

3.2. Distancia luminosidad

Luminosidad absoluta (bolométrica, es la suma de todas las frecuencias): L , es una potencia.

Luminosidad aparente: l , es un flujo de potencia.

Ambas se relacionan según $l = \frac{L}{4\pi d^2}$ (en un espacio euclídeo y estático). Con esto, podemos definir la distancia luminosidad como aquella dada por: $d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}}$. Por lo tanto, podemos conocer distancias midiendo ambas luminosidades. La aparente la podemos obtener directamente, y la absoluta veremos más tarde cómo.

Suponemos ahora una esfera de radio r_1 : el área de una esfera, tal y como la calculamos anteriormente, es $S_{\text{esfera}} = 4\pi a_0^2 S_k^2(\chi) = 4\pi a_0^2 r_1^2$.

Si A es la superficie colectora, la porción de fotones que inciden en ella es $f = \frac{A}{4\pi a_0^2 r_1^2}$

Pero hemos de tener dos efectos en cuenta:

- Por la pérdida de energía de los fotones debido al redshift, y como la luminosidad es función de la energía, habrá un factor $\frac{1}{1+z}$ a tener en cuenta.
- Además, los fotones llegará más espaciados, ya que la fuente los manda a un ritmo, pero se reciben a un ritmo más lento: $\delta t_0 = \frac{\delta t_{\text{emi}}}{1+z}$

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 r_1^2} \frac{1}{(1+z)^2}$$

Introduciendo esto en la fórmula de la distancia luminosidad: $d_L = a_0 r_1 (1+z)$.

Queremos también expresar la coordenada r_1 en función del redshift. Comenzamos desarrollando el factor de escala a segundo orden:

$$\begin{aligned} a(t) &= a(t_0) + \dot{a}(t_0)(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &= a(t_0) \left[1 + \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}(t_0)}{a(t_0)}(t - t_0)^2 + \dots \right] \\ &= a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

En este momento, se introduce el parámetro de deceleración: $q(t) = -\frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)}$. Si la expansión del Universo se acelera, $\ddot{a}(t) > 0 \rightarrow q(t) < 0$, y viceversa.

El tiempo de vuelo conforme lo definiremos como:

$$\eta(t_0) - \eta(t_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \chi(r_1) = S_k^{-1}(r_1) \simeq r_1 + O(r_1^3)$$

Para ser consistente a segundo orden, basta con el término lineal, ya que al ser S_k impar, no tiene términos cuadráticos.

Con esto podemos empezar a relacionar r_1 con el redshift:

$$\begin{aligned} a(t_0)r_1 &= a(t_0) \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{1 + H_0(t - t_0) + O((t - t_0)^2)} = \int_{t_1}^{t_0} dt \left[1 - H_0(t - t_0) + \cancel{O((t - t_0)^2)} \right] \\ &= (t_0 - t_1) - \frac{1}{2}H_0(t - t_0)^2 \Big|_{t_1}^{t_0} = (t_0 - t_1) + \frac{1}{2}H_0(t_0 - t_1)^2 \end{aligned}$$

A segundo orden, el redshift se expresa como:

$$\begin{aligned} z &= \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1 = \frac{1}{1 + H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + \dots} - 1 = \\ &= -H_0(t - t_0) + \frac{1}{2}q_0 H_0^2(t - t_0)^2 + H_0^2(t - t_0)^2 + \dots = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) H_0^2(t - t_0)^2 \end{aligned}$$

Ejercicio: Comprobar que $t_0 - t = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right) z^2 + \dots \right]$

E introduciéndolo en la distancia luminosidad:

$$d_L = a_0 r_1 (1 + z) = H_0^{-1} \left[z + \frac{1 - q_0}{2} z^2 + \dots \right]$$

Esto ya sí que es una ley de Hubble observacional, relacionando a primero orden el redshift con la distancia luminosidad, y a segundo orden relacionando la aceleración/deceleración del Universo con el redshift y la distancia luminosidad.

Si existe deceleración, $q > 0$, y se ven luminosidades mayores, y para el caso de que exista aceleración, $q < 0$, y las luminosidades observadas son menores.

Estas mediciones son el objetivo del “Programa Hubble”, para lo cual se lanzó el telescopio Hubble. Con las curvas de luminosidad se obtiene:

$$H_0 \simeq 72 \pm 8 \text{ Km/s Mpc}; \quad q_0 < 0 \text{ con } 99\% \text{ de nivel de confianza}$$

Introduciendo modelos dinámicos, se puede obtener un valor de $q_0 = -0,6$, pero depende del modelo usado.

Para obtener la luminosidad absoluta, se utiliza lo que se conoce como *cosmic distance ladder*, una sucesión de diferentes formas de medir distancias, cada vez más lejanas (de ahí la analogía con una escalera, *ladder* en inglés).

3.2.1. *Cosmic Distance ladder*

La “escalera cósmica de distancias” es la sucesión de distintos métodos para realizar medidas de la distancia a objetos cada vez más lejanos. Para avanzar un peldaño en la escalera tendremos que habernos apoyado antes en el peldaño anterior.

1. **Paralaje**

Siempre ha sido muy difícil medir paralajes, pero mejoró bastante con el satélite Hipparcos (*High Precision PARallax Collector Satellite*), del 1989 al 1993.

Resultado: Catálogo Tycho, con 20000 paralajes de estrellas cercanas.

Con este método, se consigue una precisión de 10^{-3} segundos de arco, que cubren 100 pc, lo cual es muy poco.

2. **Standard Candles** (candelas estándar)

Son fuentes de luminosidad, cuya luminosidad absoluta está relacionada de forma precisa con otra propiedad más fácilmente medible.

a) Secuencia principal de estrellas: Proporciona una relación muy precisa entre la luminosidad absoluta y el calor.

Este método consigue hasta 10 Kpc.

b) Cefeidas

Son estrellas variables, con una relación luminosidad/periodo fija. Son extremadamente brillantes, tanto que con el Hubble se han podido resolver estrellas hasta los 20 Mpc.

c) Galaxias

- Relación de Tully-Fischer (galaxias espirales) y de Faber-Jackson (galaxias elípticas). Se basan en el ensanchamiento Doppler de la línea de 21 cm del Hidrógeno. Con esto se estima la velocidad de las galaxias, pudiendo entonces obtener su masa, relacionada con la luminosidad.

- Fluctuaciones en el brillo superficial: Hay una correlación entre las fluctuaciones de brillo y la distancia (más fluctuaciones cuanto más lejos y viceversa).

Con estos dos métodos se llega a distancias de $\sim 400Mpc$

d) Supernovas de tipo IA

En sistemas binarios con una de las estrellas enana blanca, esta absorbe materia de la otra, hasta llegar al límite de Chandrasekhar, en el que colapsa, sufriendo una explosión termonuclear que se puede observar a distancias de Gpc.

Son muy parecidas todas, y muy potentes. Con esto, los equipos Hz (*High-z*) y SCP (*Supernova Cosmology Project*) descubrieron que $q_0 < 0$.

3.2.2. Relación exacta entre d_L y z

La expresión anteriormente obtenida de $d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right]$ es solo válida para casos con z pequeño, pero queremos una relación para cualquier redshift posible. Partimos del tiempo conforme:

$$\eta_0 - \eta_{emi} = \int_{t_{emi}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \chi(r_{emi}) = S_k^{-1}(r_{emi}) \rightarrow r_{emi} = S_k \left(\int_{t_{emi}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right)$$

Por otro lado, sabemos que: $1+z = \frac{a(t_0)}{a(t)} \rightarrow a(t) = \frac{a_0}{1+z} \Rightarrow da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz$

Con esto,

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a} \frac{dt}{da} da = \frac{1}{a} \frac{1}{\dot{a}} \left(-\frac{a_0}{(1+z)^2} dz \right) = -\frac{1}{a_0} \left(\frac{a_0^2}{a^2} \right) \frac{a}{\dot{a}} \frac{1}{(1+z)^2} dz = -\frac{dz}{a_0 H(z)}$$

Sustituyéndolo en la expresión anterior:

$$r_{emi} = S_k \left(-\frac{1}{a_0} \int_z^0 \frac{dz}{H(z)} \right) = S_k \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right)$$

Con lo que, finalmente, obtenemos la expresión exacta para la distancia luminosidad en función del redshift:

$$d_L = a_0 r_{emi} (1+z) = a_0 S_k \left(\frac{1}{a_0} \int_0^z \frac{dz}{H(z)} \right) (1+z)$$

3.2.3. Módulo de distancia (μ):

Ptolomeo fue el primero en hacer una clasificación de estrellas en magnitudes del 1 al 6 a ojo. Pogson (1856) clasificó entre 1 y 100 a estrellas según su luminosidad aparente, de forma que $l_1/l_6 = 10^2$. esto fija una escala logarítmica dada por la magnitud aparente:

$$m = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{l}{l_0} \right).$$

$$\text{De esta forma, } m_6 - m_1 = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{l_6}{l_0} \right) + \frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{l_1}{l_0} \right) = \frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{l_1}{l_6} \right) = \frac{5}{2} 2 = 5$$

La luminosidad aparente de referencia que se usa es $l_0 = 2,52 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$

Por ejemplo, Sirio tiene $m_S = -1,44$, Andrómeda $m_A = 0,1$, y nuestro Sol $m_{\odot} = -26,8$.

Magnitudes absolutas:

En un espacio euclídeo y estático, la luminosidad aparente si estuviera situado el objeto a 10 pc de distancia.

$$M = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{L/4\pi d^2}{L_{\odot}/4\pi(10pc)^2} \right) = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right), \quad \text{con } l_0 = \frac{L_0}{4\pi(10pc)^2}$$

A veces se usa $L_0 = 78,7L_{\odot}$, por tanto $M = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + 4,82$.

Vamos ahora a expresar d_L en función del módulo de distancia:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = \sqrt{\frac{10^{-2/5M} L_0}{4\pi 10^{-2/5m} l_0}} = 10^{1/5(m-M)} \cdot 10 \text{ pc} = 10^{1/5(m-M)+1} \text{ pc}$$

$\mu = m - M$ es lo que se conoce como “Módulo de distancia”, y las gráficas que involucran dis-

tancias suelen usarlo. Por lo tanto, $\mu = 4 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10pc} \right) = 5 \log_{10} \left[\frac{\left(\frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1-q_0}{2} z^2 + \dots \right) \right)}{10 \text{ pc}} \right]$.

Ejercicio: obtener $\mu = 25 - 5 \log_{10} H_0 \text{ (km/sMpc)} + 5 \log_{10} cz \text{ (km/s)} + 1,086(1 - q_0)z + \dots$

3.3. Distancia diámetro angular

Vamos a introducir la segunda noción de distancia que mencionamos.

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{d} \rightarrow d_A \equiv \frac{\Delta s}{\Delta\alpha}$$

De acuerdo con la métrica FLRW:

$$d_A = \frac{a_{emi} r_{emi} \Delta\alpha}{\Delta\alpha} = a_{emi} r_{emi} = \frac{a_{emi}}{a_0} a_0 r_{emi} = \frac{1}{(1+z)} \frac{d_L}{(1+z)}$$

Por tanto podemos llegar a una relación entre ambas distancias:

$$d_A = \frac{d_L}{(1+z)^2}$$

La expansión para la distancia diámetro angular es

$$d_A(z) = \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{1}{2}(3 + q_0)z^2 + \dots \right]$$

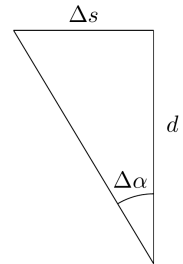


Figura 3.2:
Esquema

Como las galaxias, por ejemplo, no tienen borde bien definido, la distancia luminosidad es más interesante, pero para el CMB la distancia angular es más útil por el tamaño de las anisotropías.

Ejercicio: Variación temporal del redshift. Llegar al siguiente resultado

$$H = (1 + z)H_0 - \frac{dz}{dt_0} \quad \left(\text{Pista: } 1 + z = \frac{a_0}{a} \right)$$

Capítulo 4

Dinámica cosmológica

Como siempre, vamos a deducir todo lo que podamos a partir del principio de equivalencia, y del principio cosmológico. Puesto que la única dependencia en el tiempo del Universo viene dada por el factor de escala, vamos a deducir sus ecuaciones dinámicas.

Comenzamos con las ecuaciones de Einstein (1.5). La métrica que usaremos será la de FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la conexión:

$$\Gamma^0_{00} = \frac{1}{2} g^{0\rho} [\partial_0 g_{0\rho} + \partial_0 g_{\rho 0} - \partial_\rho g_{00}] = 0$$

Ejercicio: Calcular $\Gamma^i_{00} = 0$, $\Gamma^0_{i0} = 0$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2} g^{0\rho} [\partial_i g_{j\rho} + \partial_j g_{\rho i} - \partial_\rho g_{ij}] = \frac{1}{2} \partial_t a^2 \gamma_{ij} = a \dot{a} \gamma_{ij} = \frac{\dot{a}}{a} g_{ij}$$

Ejercicio: Calcular $\Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j$, y comprobar que $\Gamma^i_{jk} = \hat{\Gamma}^i_{jk}$, siendo esto último la conexión asociada a las secciones espaciales.

Pasamos ahora a obtener el tensor de Ricci:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\lambda_{\mu\lambda\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\mu\lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} \\ R_{00} &= \cancel{\partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00}} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} + \cancel{\Gamma^\alpha_{00} \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}} - \Gamma^\alpha_{0\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha 0} \\ &= -\partial_0 \Gamma^i_{i0} - \Gamma^j_{i0} \Gamma^i_{j0} = -\partial_0 \left(3 \frac{\dot{a}}{a} \right) - \frac{\dot{a}}{a} \delta^i_j \frac{\dot{a}}{a} \delta^j_i \\ &= -3 \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - \cancel{3 \frac{\dot{a}^2}{a^2}} = -\frac{3a\ddot{a}}{a^2} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcular $R_{0i} = 0$ (tiene sentido, ya que de lo contrario habría una dirección privilegiada, contradiciendo la isotropía), y $R_{ij} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2}g_{ij} + \hat{R}_{ij}$, siendo \hat{R}_{ij} el tensor de Ricci asociado a la métrica espacial, e igual a $\hat{R}_{ij} = (D - 1)\frac{\kappa}{a^2}g_{ij} = 2\frac{\kappa}{a^2}g_{ij}$

Ejercicio: Calcular el escalar de curvatura: $R = \frac{6}{a^2}(\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa)$

Con esto ya podemos hallar el tensor de Einstein: $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$

$$\begin{aligned} G_{00} &= R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = \frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + \kappa) \\ G_{0i} &= 0 \\ G_{ij} &= \frac{1}{a^2}(-2a\ddot{a} - \dot{a}^2 - \kappa)g_{ij} \end{aligned}$$

Finalmente, tenemos el miembro de la izquierda de las ecuaciones de Einstein. Ahora vamos a acudir al principio cosmológico de nuevo, para obtener la forma general del tensor energía-impulso (o energía-momento) $T_{\mu\nu}$

4.1. Tensor energía-impulso

Desde el punto de vista de las transformaciones de coordenadas, $T_{\mu\nu}$ se puede descomponer en T_{00} (escalar), T_{0i} (vector), y T_{ij} (tensor de orden 2). Por lo mismo que R_{0i} , T_{0i} tiene que ser cero, ya que la isotropía no admite un “vector” privilegiado. T_{00} es la densidad de energía $\rho(t)$, y $T_{ij} = p(t)g_{ij}$, siendo p la presión.

Para un fluido, su velocidad será $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{dt} = (1, \vec{0}) = \delta_0^\mu \Rightarrow u^\mu = \delta_0^\mu, u_\nu = -\delta_\nu^0$

Con esto podemos escribir el tensor $T_{\mu\nu}$ de forma covariante:

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)u_\mu u_\nu \quad (4.1)$$

Ya podemos obtener las ecuaciones para el factor de escala, usando las ecuaciones de Einstein:

$$\dot{a}^2 + \kappa = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 \quad \text{Ecuación de Friedmann} \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{a^2}(-2\ddot{a}a - \dot{a}^2 - \kappa) = 1$$

Sustituyendo la ecuación de Friedmann en esta última, llegamos a:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a \quad \text{Ecuación para la aceleración} \quad (4.3)$$

4.2. Ecuación de conservación

Por la identidad de Bianchi, $\nabla_\nu G^\nu_\mu = 0$ (de hecho el tensor de Einstein se construye de forma que efectivamente cumpla esa igualdad). Por tanto, $\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0$, la conservación covariante del tensor energía-impulso.

$$\nabla_\nu T^\nu_0 = \partial_\nu T^\nu_0 + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\nu 0} T^\nu_\lambda = 0$$

De donde se deduce:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{Ecuación de conservación} \quad (4.1)$$

Ejercicio: Calcular $\nabla_\nu T^\nu_i \equiv 0$ (no da información)

Podríamos pensar que tenemos tres ecuaciones (Friedmann, aceleración y conservación) para tres incógnitas (a, ρ, p) , pero se puede demostrar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Friedmann + Aceleración} \Rightarrow \text{Conservación} \\ \text{Friedmann + Conservación} \Rightarrow \text{Aceleración} \end{array} \right.$$

Normalmente se escoge la segunda opción, aunque a veces interesa estudiar la aceleración.

Vamos a ahondar en el significado de la ecuación de conservación:

$$a^3 \frac{d\rho}{dt} + 3a^2 \dot{a}(\rho + p) = \frac{d(\rho a^3)}{dt} + p \frac{da^3}{dt} = 0$$

Si llamamos $v_1 = a^3$ al volumen físico en una unidad de volumen comovimiento, y u_1 a la energía contenida en v_1 , entonces:

$$\frac{du_1}{dt} + p \frac{dv_1}{dt} = 0 \rightarrow dU + pdV = 0$$

De termodinámica sabemos que $dU + pdV = TdS$, por tanto $dS = 0$: La entropía se conserva en la evolución del Universo, por tanto el principio cosmológico implica una evolución adiabática del Universo. Entonces, la entropía contenida en un volumen comovimiento se conserva: $S = a^3(t)s(t) = cte \Rightarrow s(t) \propto \frac{1}{a^3}$.

De $dU + pdV = TdS$ deducimos:

$$d(\rho(t)V) + pdV = Td(s(t)V) \rightarrow \frac{ds}{dT}VdT + sdV = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT}VdT + \frac{\rho}{T}dV + \frac{p}{T}dV$$

Igualando los diferenciales por separado:

$$\left\{ \begin{array}{l} s(T) = \frac{\rho + p}{T} \\ T \frac{dp}{dT} = p + \rho \end{array} \right.$$

La primera de esas dos ecuaciones la podemos usar para hallar la densidad de entropía del Universo.

4.3. Ecuación de estado

En cosmología, se usan ecuaciones de estado del tipo $p = w\rho$, con $w = cte$. El Universo puede considerarse un “multifluido”. Por un lado, con $w = 0$ tenemos el “polvo” o “materia fría”, por tanto $p = 0$ (por ejemplo, galaxias). Por otro lado, con $w = \frac{1}{3}$ tenemos la radiación, con $p = \rho/3$; y finalmente con $w = -1$ tenemos la constante cosmológica.

Esto último tiene que ver con que el tensor energía-impulso asociado a la constante cosmológica es $T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = -\frac{\Lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu}$, por lo que, asociándolo al tensor energía-impulso de un fluido perfecto 4.1, concluimos que $p = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G}$.

Introduciendo la ecuación de estado en la de conservación:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + w\rho) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(1 + w) = 0 \Rightarrow \log \rho + (3 + 3w) \log a = cte \Rightarrow \rho a^{3+3w} = cte$$

- Polvo (materia fría): $\rho a^3 = cte \rightarrow \rho \propto a^{-3}$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^3 = \rho_0(1 + z)^3$$

- Radiación: $\rho a^4 = cte \Rightarrow \rho \propto a^{-4}$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a(t)} \right)^4 = \rho_0(1 + z)^4$$

Al contrario que para el polvo (cuya densidad de energía escala con el volumen como-
vimiento, hay un factor $(1 + z)$ adicional debido al desplazamiento al rojo, por tanto
hacia atrás en el tiempo tenemos un Universo más caliente.

Según la Ley de Planck, $\rho \propto T^4$, por tanto $T \propto \frac{1}{a(t)} \Rightarrow T = T_0(1 + z)$.

Por ejemplo, en el CMB hay una temperatura media de $T_0 = 2,73$ K, por tanto con
un redshift de $z = 1100$, encontramos una $T = 3000$ K, y en esa situación lo que
encontramos sería un plasma, asociado al desacoplo materia-radiación.

En estas condiciones, el Universo se hace transparente, los fotones no encuentran cargas
libres que los frenen. Esto es lo que se conoce como la “superficie de último scattering”
(LSS).

- Constante cosmológica: $\rho a^0 = \rho = cte$ lo cual tiene sentido, ya que como $\rho^{(\Lambda)} = \frac{\Lambda}{8\pi G}$,
no depende del tiempo.

De estos casos se deduce que en el *early Universe*, es decir, a tiempos cortos, domina la
radiación, pero a tiempos suficientemente largos domina la constante cosmológica.

4.4. Ecuación de Friedmann

Vamos ahora a estudiar la ecuación de Friedmann más en profundidad.



Figura 4.1: Aleksandr Friedmann

$$\dot{a}^2 + \kappa = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 \rightarrow H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} H^2 \rho$$

Definimos la densidad crítica como: $\rho_{cr}(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$

Introducimos el parámetro de densidad (con tilde para denotar dependencia temporal):

$$\tilde{\Omega} = \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}(t)}$$

En el presente: $\rho_{cr}^{(0)} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \cdot 10^{-29} h \text{ g/cm}^3$, lo cual, como vimos en los primeros capítulos, se corresponde con 6 protones/m³.

Con esto podemos escribir la ecuación de Friedmann así:

$$H^2 + \frac{\kappa}{a^2} = \frac{8\pi G}{3H^2} H^2 \rho = \tilde{\Omega} H^2$$

Existen tres casos posibles:

$$(1 - \tilde{\Omega})H^2 = -\frac{\kappa}{a^2} \begin{cases} \kappa > 0 \rightarrow \tilde{\Omega} > 1, \rho > \rho_{cr} \\ \kappa = 0 \rightarrow \tilde{\Omega} = 1, \rho = \rho_{cr} \\ \kappa < 0 \rightarrow \tilde{\Omega} < 1, \rho < \rho_{cr} \end{cases}$$

Introduciendo la ecuación de estado, la ecuación se puede escribir:

$$H^2 \tilde{\Omega} = \frac{8\pi G}{3} \rho \rightarrow H^2 \tilde{\Omega} = H_0^2 \tilde{\Omega} (1+z)^{3+3w} = H^2 + \frac{\kappa}{a^2}$$

Podemos escribirla también usando $\tilde{\Omega}_k = -\frac{\kappa}{a^2 H^2}$:

$$1 + \frac{\kappa}{a^2 H^2} = \tilde{\Omega} \Rightarrow \tilde{\Omega} + \tilde{\Omega}_k = 1$$

Esto es lo que se conoce como la *Regla de la suma cósmica*. En esa ecuación, $\tilde{\Omega}$ estaría dando cuenta de las densidades de materia, radiación y constante cosmológica:

$$\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda \rightarrow \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}_m + \tilde{\Omega}_{rad} + \tilde{\Omega}_\Lambda$$

$$\tilde{\Omega}_m = \frac{\rho_m}{\rho_{cr}}, \quad \tilde{\Omega}_{rad} = \frac{\rho_{rad}}{\rho_{cr}}, \quad \tilde{\Omega}_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{cr}}$$

4.4.1. Derivación newtoniana

La ecuación de Friedmann se puede obtener en un contexto newtoniano, vamos a ver cómo y por qué.

El Teorema de Birkhoff y el principio cosmológico son la razón por la que esto es posible, ya que en un entorno muy pequeño cosmológicamente hablando, por el Teorema de Birkhoff sabemos que la métrica se puede aproximar a la de Minkowski, por tanto podemos usar la mecánica newtoniana.

La ecuación para la expansión uniforme es $\dot{\vec{r}} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\vec{r}_0$. Tiene como solución $\vec{r}(t) = \frac{a(t)}{a(t_0)}\vec{r}_0$

$$\left(\dot{\vec{r}} = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\vec{r}_0 = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \frac{a(t)}{a(t_0)}\vec{r}_0 = H(t)\vec{r} \right)$$

Por un lado tenemos la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}mH^2\vec{r}^2 = \frac{1}{2}m\frac{\dot{a}^2}{a^2}\vec{r}^2$$

Por otro lado tenemos la energía potencial:

$$V = -\frac{GmM(r)}{r} = -\frac{4}{3}\pi Gm\rho r^3$$

La energía total será:

$$E = T + V = \frac{mr_0^2}{a_0^2} \left[\frac{a^2}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 \right] = cte$$

Definiendo $\kappa \equiv -\frac{2Ea_0^2}{mr_0^2}$ llegamos a la ecuación de Friedmann:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{\kappa}{2} - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = 0$$

4.5. Ecuación para la aceleración

Vamos a estudiar más la ecuación para la aceleración:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a$$

Si $(\rho + 3p) > 0$, el Universo decelera su expansión, eso es lo que se esperaba antes de 1998, ya que es lo que ocurre con polvo ($w = \frac{1}{3}$), radiación ($w = 0$) o intermedios. Pero lo que

se descubrió fue lo contrario, acelera, por tanto el Universo tiene que contener fluido con $w < -\frac{1}{3}$, la energía oscura.

Ejercicio: Ver que podemos escribir el parámetro de deceleración como $q = \frac{1 + 3w}{2} \tilde{\Omega}_w$

Suponemos un modelo con $\dot{a}(t_0) > 0, \ddot{a}(t_0) < 0$. En este modelo es inevitable la singularidad inicial:

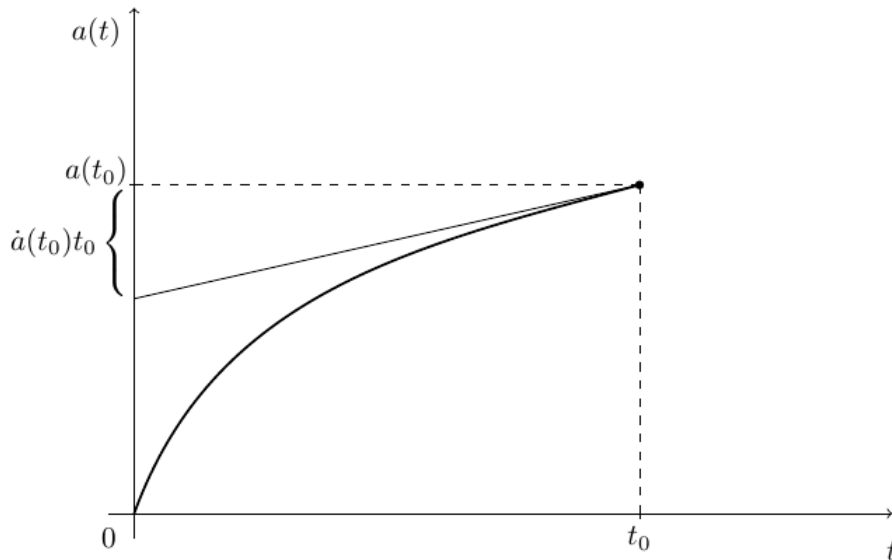


Figura 4.2: Evolución del factor escala según el modelo con $\dot{a}(t_0) > 0, \ddot{a}(t_0) < 0$, y su recta tangente en la actualidad t_0

Podemos establecer la siguiente desigualdad, en base a la gráfica: $\dot{a}(t_0)t_0 < a(t_0)$, y con ella calcular nuestro tiempo $t_0 < \frac{a(t_0)}{\dot{a}(t_0)} = H_0^{-1} = 13,6$ Gyr.

Más adelante veremos que este modelo es erróneo, tiene una “crisis de edad”, ya que el Universo según este modelo sería más joven que las estrellas.

4.5.1. Fondo cósmico de fotones

Fotones en equilibrio térmico con el resto de las partículas (nucleosíntesis). Su distribución está dada por la ley de Bose:

$$n_d = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} g \frac{E^2}{e^{k_B T_d} - 1}, \quad g = 2$$

Siendo n_d el número de fotones en el momento de desacoplo materia-radiación, en una unidad de volumen. Es válido en el equilibrio térmico, con $T > T_d \Rightarrow 1 + z > 1 + z_d$. ¿Cómo es la

distribución actual? Igual que si hubiera equilibrio térmico, aunque no lo están (mantienen una distribución de cuerpo negro, o de Bose). ¿Y por qué se mantiene esta distribución?

$$dP_d(E, V) \propto \frac{E^2 dE}{e^{E/k_B T} - 1}$$

$$\Rightarrow dN_0(E, V_0) \propto (1 + z_d)^3 E^2 dE \frac{V_0}{(1 + z_d)^3} \frac{1}{e^{(1+z_d)E/k_B T_d} - 1} \propto \frac{E^2 dE}{e^{E/k_B T_0} - 1}$$

Seguimos teniendo una distribución de Bose pero con una temperatura $T_0 = \frac{T_d}{1 + z_d}$.

Se ha comprobado que la distribución de los fotones es una distribución de cuerpo negro con una temperatura media de: $T_d \simeq 2,75$ K. Podemos calcular la energía y el número de fotones que tenemos:

$$\begin{cases} \rho(T) &= a_B T^4 \quad (\text{Ley de cuerpo negro}) \\ a_B &= \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^3} = 7,65377 \cdot 10^{-15} \text{ eVg/cm}^3 \text{K}^4 \end{cases}$$

Donde $\rho(T)$ es la energía por unidad de volumen.

Número de fotones: $dn_\gamma(T) = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$. Integrando sobre todas las frecuencias:

$$n_\nu(T) = \int_0^\infty d\nu \frac{8\pi\nu^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = \frac{2\xi(3)}{\pi^2} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3$$

donde $\xi(s)$ es la función zeta de Riemann. Para $T \simeq 2,75$ K tenemos 411 fotones/cm³, y una densidad de energía $\rho = 4,64 \cdot 10^{-31} \text{ eVg/cm}^3 \sim 10^{-4} \rho_{cr}$.

Hasta un redshift de 10000 la cantidad de materia domina sobre la radiación.

$$\eta \equiv \frac{\text{n}^\circ \text{ de bariones}}{\text{n}^\circ \text{ de fotones}} = \frac{n_B}{n_\gamma}; \quad \Omega = \frac{\rho_B}{\rho_{cr}}; \quad n_B^{(0)} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_B \quad (\text{número de bariones actuales})$$

El parámetro Ω_B se calcula estudiando la nucleosíntesis: $\Omega_B = 0,04$.

$$\eta_B^{(0)} = 1,123 \cdot 10^{-5} \Omega_B h^2 \rightarrow \eta = 0,6 \cdot 10^{-9}$$

Hay dos mil millones de fotones por cada barión, producto del retardo de los efectos de desacoplo.

¿Por qué hay tan pocos bariones? No se cancelan exactamente bariones y antibariones, pero casi. Esta pequeña no cancelación es el objeto de estudio de la bariogénesis.

4.6. Dinámica cosmológica a tiempos cortos

Vamos a partir de la ecuación de Friedmann, para el caso de materia ordinaria ($w > -1/3$).

$$\rho a^2 \propto \frac{a^2}{a^{3+3w}} = a^{-1-3w}$$

$$\text{Cuando } \left. \begin{array}{l} a \rightarrow 0 \\ w > -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \rho a^2 \rightarrow \infty$$

A tiempos cortos, domina el primer sumando de la ecuación de Friedmann (como si el Universo fuera plano, $\kappa = 0$). Si añadimos la constante cosmológica: $\rho \rightarrow \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G}$ resulta en $\frac{\Lambda}{3}a^2$. Si hay Big-Bang, este término tiende a cero (incluso influye menos que la curvatura). Por tanto la ecuación

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2$$

da lugar a los modelos de Einstein-de Sitter, modelos cuya curvatura es nula.

Cualquier Universo, a tiempos cortos, se comporta de esta manera. Pero, ¿qué significa exactamente “tiempos cortos”?

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{\kappa}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3H^2}\rho H^2 = \tilde{\Omega}H^2 \\ \Rightarrow H^2(1 - \tilde{\Omega}) &= -\frac{\kappa}{a^2} \end{aligned}$$

Tiempos cortos se referirá a la época en la que se cumple la siguiente desigualdad: $\frac{|\kappa|}{a^2} = H^2|1 - \tilde{\Omega}| \ll \tilde{\Omega}H^2 \Rightarrow |1 - \tilde{\Omega}| \ll \tilde{\Omega} \rightarrow \tilde{\Omega} \simeq 1$, por tanto son aquellos para los cuales podemos “tirar” el término de curvatura.

Si tenemos curvatura, esta deja de influir si el Universo es crítico ($\tilde{\Omega} \simeq 1$).

4.6.1. Universos de Einstein-de Sitter

Estos Universos serán aquellos en los que $\kappa = 0$, $p > -\frac{1}{3}\rho$ (planos, y con materia ordinaria).

Tenemos la ley de conservación $\rho a^{3+3w} = \rho_0 a_0^{3+3w} \equiv b^2$. Sustituyendo en la ecuación de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}b^2 a^{-1-3w}$$

Integrando esta ecuación:

$$\begin{aligned} \dot{a}a^{(1+3w)/2} &= \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}b \rightarrow \int_0^a da a^{(1+3w)/2} = \int_0^t dt \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}b \\ &\Rightarrow \frac{a^{(3+3w)/2}}{(3+3w)/2} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}bt \end{aligned}$$

Dividiendo esto entre su valor en el tiempo actual t_0 :

$$\frac{t}{t_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{(3+3w)/2} \begin{cases} t = t_0(1+z)^{-(3+3w)/2} \\ a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/(3+3w)} \end{cases}$$

El parámetro de Hubble es:

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3+3w} \frac{1}{t} \rightarrow H(t) \sim \frac{1}{t}$$

El parámetro de deceleración es:

$$q = \frac{1+3w}{2}$$

Y la densidad será (dado que $\tilde{\Omega} \simeq 1$):

$$\rho(t) = \rho_{cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2 t^2}$$

Por tanto, $\rho(t) \sim \frac{1}{t^2}$ (hay una singularidad a $t = 0$, el Big-Bang).

- Caso I: Polvo ($w = 0$), $\Omega_m = 1$.

Es un caso específico de los modelos de Einstein-de Sitter

$$a(t) \sim t^{2/3}, \quad t = t_0(1+z)^{-3/2}$$

La constante de Hubble H_0 (si Einstein-de Sitter fuera un buen modelo) sería $\frac{2}{3t_0}$. Pero

t_0 tendría que ser $t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}$ (la edad del Universo).

$$H_0 = 71 \text{ Km/s Mpc} \rightarrow t_0 \simeq 9,7 \text{ Gyr}$$

Por tanto la edad de las estrellas es mayor que la del Universo, según este modelo. Si el Universo es crítico tenemos que tener algo más que materia no relativista, es decir, energía oscura.

- Caso II: Modelo de Einstein-de Sitter de radiación ($w = 1/3$), $\Omega_{rad} = 1$.
Es un modelo realista del Universo primitivo.

$$a(t) \sim t^{1/2} \quad \rho(t) = \frac{3c^2}{32\pi G t^2} = \frac{3}{32\pi} \rho_{Planck} \left(\frac{t_{Planck}^2}{t^2} \right)$$

Ejercicio: Resolver Einstein-de Sitter en tiempo conforme.

$$dt = a(\eta)d\eta \Rightarrow \frac{dt}{d\eta} = a$$

Haciendo el cambio de variable en la ecuación de Friedmann, se obtiene:

$$\left(\frac{a}{a_0} \right)^{(1+3w)/2} = \frac{\eta}{\eta_0} \rightarrow \begin{cases} \eta = \eta_0 (1+z)^{-(1+3w)/2} \\ a = a_0 \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{2/(1+3w)} \end{cases}$$

4.6.2. Modelo de de Sitter

Es un modelo con inflación, con constante cosmológica. Corresponde a un Universo vacío salvo por la constante cosmológica, que es la que domina a tiempos largos. Es un modelo crítico, con $\kappa = 0, p = -\rho, (w = -1)$.

Ecuación de Friedmann:

$$\dot{a}^2 = \frac{\Lambda}{3} a^2 \rightarrow a(t) = a_0 e^{H(t-t_0)}$$

Donde $H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = cte$ (por tanto el parámetro de deceleración $q = -1$). Es un Universo con expansión exponencial, inflacionario, al contrario que en el caso de Universo con materia, cuya expansión es polinómica.

La métrica de este universo por tanto, será:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2 = -dt^2 + e^{2Ht}d\vec{x}^2$$

Donde, por comodidad, hemos fijado $a_0 e^{-Ht_0} = 1$. El factor de escala no tiene significado físico los modelos planos, solo importan los cocientes.

Vamos a estudiar de donde viene la geometría de este Universo. Es máximamente simétrico como espaciotiempo. No tiene curvatura, pero $R = 0$ (no tiene curvatura espacial, pero si 4-dimensional). Para construir su geometría se toma un hiperboloide en 5D (usaremos la notación habitual, en la que las coordenadas serán $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_5\}$, sin q_4):

$$-q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_5^2 = 1$$

Su métrica, con la constante de Hubble para darle dimensiones correctas, será:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2} (-dq_0^2 + dq_1^2 + dq_2^2 + dq_3^2 + dq_5^2)$$

Definimos $\eta = -\frac{1}{(q_0 + q_5)H}$, $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$, $\vec{x} = \frac{\vec{q}}{(q_0 + q_5)H}$ y escribimos el hiperboloide de la siguiente forma: $-(q_0 + q_5)(q_0 - q_5) + \vec{q}^2 = 1$

Ahora vamos a escribir las q_i en términos de las nuevas coordenadas η , \vec{x} :

$$q_0 + q_5 = -\frac{1}{H\eta}, \quad \vec{q} = -\frac{\vec{x}}{\eta}$$

Para $q_5 - q_0$ usamos el hiperboloide:

$$q_5 - q_0 = \frac{q - \vec{q}}{q_0 + q_5} = \frac{1 - \vec{x}^2/\eta^2}{-1/H\eta} = H\eta \left[\left(\frac{x}{\eta}\right)^2 - 1 \right]$$

De manera que:

$$ds^2 = \frac{1}{H^2} (-dq_0^2 + d\vec{q}^2 + dq_5^2) = \frac{1}{H^2} (d(q_5 + q_0)d(q_5 - q_0) + d\vec{q}^2) = \frac{1}{H^2\eta^2} (-d\eta^2 + d\vec{x}^2)$$

Para poner la métrica en tiempo cósmico $dt = a(\eta)d\eta$:

$$\frac{dt}{d\eta} = a = \frac{\pm 1}{H\eta} \rightarrow \eta = -\frac{1}{H}e^{-Ht}$$

De las dos opciones (+/-) hemos escogido el (-) para que t y η vayan en el mismo sentido, si t crece, η crece. A su vez,

$$\frac{d\eta}{dt} = e^{-Ht} = -H\eta = \frac{1}{a}$$

De esto se deduce que $H^2\eta^2 = e^{-2Ht}$, de manera que

$$ds^2 = \frac{1}{H^2\eta^2} (-d\eta^2 + d\vec{x}^2) = e^{2Ht} [-e^{-2Ht}dt^2 + d\vec{x}^2] = -dt^2 + e^{2Ht}d\vec{x}^2$$

Vamos a ver qué información podemos sacar de este modelo: $q_0 + q_5 = e^{Ht}$

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad 0 < q_0 + q_5 < 1 & \left\{ \begin{array}{l} -\infty < \eta < -1/H \\ -\infty < t < 0 \end{array} \right. \\ \blacksquare \quad 1 < q_5 + q_0 < \infty & \left\{ \begin{array}{l} -1/H < \eta < 0 \\ 0 < t < \infty \end{array} \right. \\ \blacksquare & \left\{ \begin{array}{ll} 0 < q_5 + q_0 < -1 & \rightarrow 0 < \eta < 1/H \quad \forall t \\ -1 < q_5 + q_0 < 0 & \rightarrow 1/H < \eta < 0 \quad \forall t \end{array} \right. \end{aligned}$$

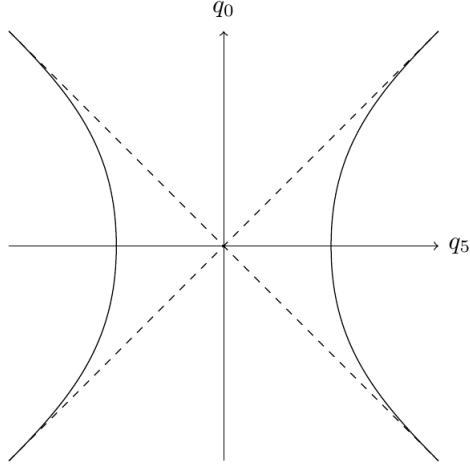


Figura 4.3: Hiperboloide de de Sitter

Por tanto, en este modelo, podemos ver que no hay Big Bang.

Como es una superficie 4-dimensional máximamente simétrica, hay 10 Killings (ds^2 es invariante Lorentz en 4+1 dimensiones, $SO(4+1)$ tiene 10 generadores). Hay 3 translaciones, 3 rotaciones y 4 boosts.

En el periodo inflacionario, el Universo es de Sitter.

4.7. Dinámica cosmológica completa

Vamos a dar una descripción realista, teniendo en cuenta radiación, materia (no relativista) y energía oscura.

$$\tilde{\Omega}_i = \frac{\rho_i}{\rho_{cr}} = \rho_i \frac{8\pi G}{3H^2}$$

La evolución del parámetro de densidad sale de la ecuación de conservación:

$$\left\{ \begin{array}{l} H^2 \tilde{\Omega}_m = H_0^2 \Omega_m (1+z)^3 \\ H^2 \tilde{\Omega}_{rad} = H_0^2 \Omega_{rad} (1+z)^4 \\ H^2 \tilde{\Omega}_\Lambda = \frac{\Lambda}{3} \\ H^2 \tilde{\Omega}_k = -\frac{\kappa}{a^2} = \Omega_k H_0^2 (1+z)^2 \end{array} \right.$$

Ahora resolveremos la ecuación de Friedmann con estas 4 especies:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \rho_{rad} + \rho_\Lambda) = H^2 (\tilde{\Omega}_{rad} + \tilde{\Omega}_m + \tilde{\Omega}_\Lambda) \\ &= H_0^2 [\Omega_{rad} (1+z)^4 + \Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda] \end{aligned}$$

Introducimos la variable $x = \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}$, $\dot{x} = \frac{\dot{a}}{a_0}$

$$\Rightarrow \dot{a}^2 = -\kappa + H_0^2 \left(\frac{\Omega_{rad}}{x^4} + \frac{\Omega_m}{x^3} + \Omega_\Lambda \right) a^2$$

Que dividiendo entre a_0^2 queda:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \Omega_k H_0^2 + H_0^2 \left(\frac{\Omega_{rad}}{x^4} + \frac{\Omega_m}{x^3} + \Omega_\Lambda \right) x^2 = H_0^2 \left(\frac{\Omega_{rad}}{x^2} + \frac{\Omega_m}{x} + \Omega_k + \Omega_\Lambda x^2 \right)$$

Integrando esto, obtenemos:

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/1+z} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{x^2} + \frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_k}}$$

Por tanto, $t = t(z)$, y a $z = 0$ tenemos la edad del Universo.

La contribución de los fotones a la densidad $\Omega_\gamma = 4,8 \cdot 10^{-5}$. Si los neutrinos no tuvieran masa, hay que ponerles $T_\nu = 1,9\text{K}$, pero actualmente sabemos que la tienen, por lo que hay que hacer una corrección, aunque $m = 0$ es una buena aproximación ($\Omega_{rad} > \Omega_\gamma$ por los neutrinos).

En la actualidad:

$$\Omega_{rad} = 8 \cdot 10^{-5}, \quad \Omega_m = 0,28, \quad \Omega_\Lambda = 0,72, \quad \Omega_k = 0$$

4.8. Igualdad dinámica entre materia y radiación

Vamos a estudiar el periodo llamado “de equivalencia”, aquel en el que $\tilde{\Omega}_{m,eq} = \tilde{\Omega}_{rad,eq}$. A tiempos cortos, no tendremos curvatura, por lo que tendremos un Universo de Einstein-de Sitter.

$$\begin{aligned} H_{eq}^2 \tilde{\Omega}_{m,eq} &= H_{eq}^2 \tilde{\Omega}_{rad,eq} \rightarrow H_0^2 \Omega_m (1+z_{eq})^3 = H_0^2 \Omega_{rad} (1+z_{eq})^4 \\ \Rightarrow 1+z_{eq} &= \frac{\Omega_m}{\Omega_{rad}} = 3300 \rightarrow T_{eq} \simeq 10^4 \text{K} > 3000 \text{K} \end{aligned}$$

Esta es la temperatura a la que se produce el “crossover materia-radiación”, cuando la radiación deja de dominar. Podemos hallar el parámetro de Hubble en la equivalencia:

$$\frac{1}{2} H_{eq}^2 = H_0^2 \Omega_m (1+z_{eq})^3 \rightarrow H_{eq}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0^{-1} \Omega_m^{-1/2} (1+z_{eq})^{-3/2} = 30 \text{Kpc}$$

Vamos a estudiar la dinámica cosmológica en este caso:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} [\rho_m a^2 + \rho_{rad} a^2] = \tilde{\Omega}_m H^2 a^2 + \tilde{\Omega}_{rad} H^2 a^2$$

Pasando a tiempo conforme:

$$\dot{a} = \frac{da}{dt}, \quad a' = \frac{da}{d\eta} = \dot{a} \frac{dt}{d\eta} = \dot{a} a \rightarrow \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \dot{a}$$

$$\left(\frac{da}{d\eta} \right)^2 = \tilde{\Omega}_m H^2 a^4 + \tilde{\Omega}_{rad} H^2 a^4 = \Omega_{m,eq} H_{eq}^2 a_{eq}^3 a + \Omega_{rad,eq} H_{eq}^2 a_{eq}^4 = \frac{1}{2} H_{eq}^2 a_{eq}^4 \left[\frac{a}{a_{eq}} + 1 \right]$$

Con la notación usada anteriormente de $x = \frac{a}{a_{eq}}$:

$$\left(\frac{dx}{d\eta} \right)^2 = \frac{1}{2} H_{eq}^2 a_{eq}^2 (x+1) \rightarrow \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\eta H_{eq} a_{eq} d\eta$$

$$2(\sqrt{x+1} - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta \rightarrow \sqrt{x+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta + 1$$

$$\rightarrow x + 1 = \frac{1}{8} H_{eq}^2 a_{eq}^2 \eta^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta + 1$$

$$\Rightarrow \frac{a(\eta)}{a_{eq}} = \frac{1}{8} H_{eq}^2 a_{eq}^2 \eta^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta$$

Tiene sentido, a tiempos cortos domina el término con η y a tiempos mayores el término con η^2 , es lo que pasaba con de Sitter.

En η_{eq} ,

$$1 = \frac{1}{8} H_{eq}^2 a_{eq}^2 \eta_{eq}^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta_{eq}$$

Podemos así calcular el producto $a_{eq} \eta_{eq} = (\eta - 2\sqrt{2}) H_{eq}^{-1}$:

$$\frac{a}{a_{eq}} = (3 - 2\sqrt{2}) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^2 - (2\sqrt{2} - 2) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)$$

Pasamos a tiempo cósmico:

$$t = \int_0^\eta a(\eta') d\eta' = a_{eq} \eta_{eq} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^3 + a_{eq} \eta_{eq} (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^2$$

$$\Rightarrow t_{eq} = \frac{\sqrt{2}}{3} a_{eq} \eta_{eq} = \frac{4}{3} (\sqrt{2} - 1) H_{eq}^{-1} = 55000 \text{ yr}$$

Dividiendo t entre t_{eq} :

$$\frac{t}{t_{eq}} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - 2 \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^3 + \left(3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{eq}} \right)^2$$

Antes de continuar, vamos a volver a la expresión:

$$\sqrt{\frac{a}{a_{eq}} + 1} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} H_{eq} a_{eq} \eta \rightarrow \eta = 2\sqrt{2} H_{eq}^{-1} a_{eq}^{-1} \left(\sqrt{\frac{a}{a_{eq}} + 1} - 1 \right)$$

Con $\eta_{eq} = (\eta - 2\sqrt{2}) H_{eq}^{-1} a_{eq}^{-1}$:

$$\frac{\eta}{\eta_{eq}} = (1 + \sqrt{2}) \left[\frac{a}{a_{eq}} - 1 \right]$$

Ahora sí, sustituyendo esto donde nos habíamos quedado:

$$\frac{t}{t_{eq}} = \frac{\left(\frac{a}{a_{eq}} - 2 \right) \sqrt{\frac{a}{a_{eq}} + 1} + 2}{2 - \sqrt{2}}$$

Ejercicio: Desarrollar a segundo orden la raíz, para comprobar que va como $t^{1/2}$

De aquí, vemos el tiempo de la recombinación:

$$\begin{aligned} \frac{t_{rec}}{t_{eq}} &= \frac{\left(\frac{a_{rec}}{a_{eq}} - 2 \right) \sqrt{\frac{a_{rec}}{a_{eq}} + 1} + 2}{2 - \sqrt{2}} \\ &= \frac{\left(\frac{1 + z_{eq}}{1 + z_{rec}} - 2 \right) \sqrt{\frac{1 + z_{eq}}{1 + z_{rec}} + 1} + 2}{2 - \sqrt{2}} \simeq 370000 \text{ yr} \end{aligned}$$

4.9. Modelo $\Lambda + m$

Despreciamos los términos de radiación y curvatura, la radiación ha dejado de dominar y da paso a la energía oscura y la materia.

$$t = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_m}{x} + \Omega_\Lambda x^2}}$$

Con el cambio $x = u^{2/3}$:

$$t = \frac{2}{3H_0} \int_0^{(1+z)^{-3/2}} du \frac{1}{\sqrt{\Omega_m + (1 - \Omega_m)u^2}} = \frac{2}{3H_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega_m}} \sinh^{-1} \left[\sqrt{\frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m}} (1 + z)^{-3/2} \right]$$

Por tanto, la edad del Universo ($z = 0$) será: $t_0 = 13,7$ Gyr.

Para calcular el factor de escala:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_m}{1 - \Omega_m} \right)^{1/3} \sinh^{2/3} \left(\sqrt{1 - \Omega_m} \frac{3}{2} H_0 t \right)$$

Si lo representamos, con t_i el tiempo del punto de inflexión:

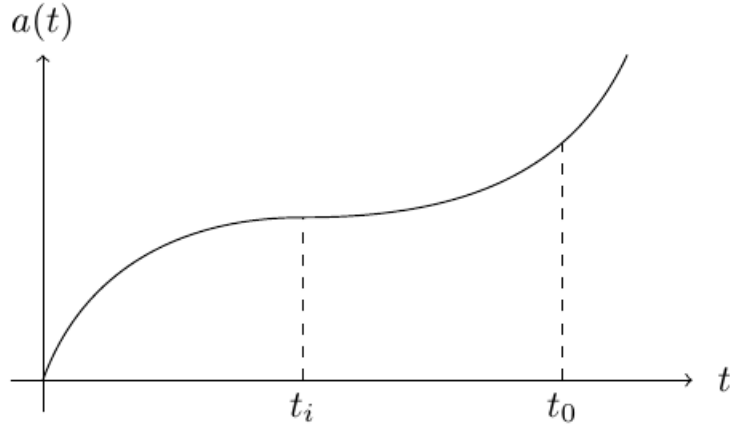


Figura 4.4: Evolución del factor de escala en el modelo $\Lambda+m$

Ejercicio: Ver que esto interpola el comportamiento de de Sitter a tiempo pequeño ($\sim x$), y a tiempo largo ($\sim e^{\sqrt{\Lambda}H_0 t}$)

El parámetro de deceleración del modelo:

$$\begin{aligned}\frac{\ddot{a}}{a} &= -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m - \frac{4\pi G}{3}(-2\rho_\Lambda) = -\frac{4\pi G}{3}\rho_m + \frac{\Lambda}{3} \\ q &= -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{a} \frac{1}{H^2} = \frac{4\pi G}{3H^2}\rho_m - \frac{\Lambda}{3H^2} = \frac{1}{2}\tilde{\Omega}_m - \tilde{\Omega}_\Lambda \\ &\Rightarrow q_0 = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda = -0,6\end{aligned}$$

¿En qué tiempo es el punto de inflexión? ($q_i = 0$)

$$\left. \begin{array}{l} \Omega_{m,i} = 2\Omega_{\Lambda,i} \\ \Omega_{m,i} + \Omega_{\Lambda,i} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \Omega_{m,i} = \frac{2}{3}, \quad \Omega_{\Lambda,i} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}H^2\tilde{\Omega}_m &= H_0^2\Omega_m(1+z)^3 \\ \frac{2}{3} = \Omega_{m,i} &= \frac{H_0^2}{H^2}\Omega_m(1+z)^3 = \frac{H_0^2\Omega_m(1+z)^3}{H_0^2\Omega_m(1+z)^3 + H_0^2\Omega_\Lambda}\end{aligned}$$

Con un valor de $1+z_i = 1,73$, se obtiene un tiempo del punto de inflexión $t_i = 7$ Gyr.

Capítulo 5

Problemas del Modelo Cosmológico Estándar

Principalmente, hay dos problemas en el Modelo Cosmológico Estándar, que hicieron necesaria la introducción de una primera fase inflacionaria, con expansión exponencial. Estos dos problemas son el de la planaridad y el del horizonte.

5.1. Problema de la planaridad

En el Universo, observamos que $\Omega_{tot} = \Omega_{rad} + \Omega_m + \Omega_\Lambda \simeq 1$, lo cual implica que o bien la curvatura es nula, o bien estamos a tiempos cortos. Y sin embargo, no parece que nuestro Universo sea joven.

$$1 + \frac{\kappa}{a^2 H^2} = \tilde{\Omega}_{tot}$$
$$\Rightarrow 1 - \tilde{\Omega}_{tot} = -\frac{\kappa}{H^2 a_0^2} (1+z)^2$$

Ahora vamos a escribir esta ecuación con la evolución del parámetro de Hubble, vista en el capítulo anterior:

$$H = H_0^2 [\Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2]$$
$$= H_0^2 [\Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{tot})(1+z)^2]$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$1 - \tilde{\Omega}_{tot} = -\frac{\kappa}{H_0^2 a_0^2} \frac{(1+z)^2}{\Omega_{rad}(1+z)^4 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + (1 - \Omega_{tot})(1+z)^2}$$
$$= \frac{1 - \Omega_{tot}}{\Omega_{rad}(1+z)^2 + \Omega_m(1+z) + \Omega_\Lambda / (1+z)^2 + (1 - \Omega_{tot})}$$

Si $z \gg z_{eq}$, domina el término de la radiación:

$$1 - \tilde{\Omega}_{tot} \lesssim (1 - \Omega_{tot})\Omega_{rad}^{-1}(1 + z)^{-2}$$

Introduciendo ahora los valores conocidos $1 - \Omega_{tot} < 10^{-2}$, $\Omega_{rad}^{-1} \sim 10^{-4}$ y $T = T_0(1 + z)$ (tomamos la temperatura del Universo como la temperatura de los fotones, en nuestro caso es una aproximación decente):

$$1 - \tilde{\Omega}_{tot} \simeq 10^2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2$$

En la nucleosíntesis: $T_{ns} \simeq 0,1 \text{ MeV} \simeq 10^9 \text{ K}$. Esto implica $1 - \tilde{\Omega}_{tot} \simeq 10^{-16}$.

Esto no parece en absoluto natural, y si somos más especulativos, en la Gran Unificación tendríamos $T_{GUT} \simeq 10^{16} \text{ GeV} \simeq 10^{29} \text{ K}$, implicando $1 - \tilde{\Omega}_{tot} \simeq 10^{-56}$.

Ambos no tienen sentido, ya que habría que tener unas condiciones iniciales antinaturalmente precisas para llegar a nuestro estado, con $\tilde{\Omega}_{tot}$ prácticamente igual a 1, o bien tener alguna simetría desconocida que obligara a esto, pero la explicación actual es la inflación.

5.1.1. Inflación como justificación de la planaridad

La inflación es un periodo de expansión exponencial, mediante un mecanismo de acoplo de un campos, el inflatón, al campo gravitatorio.

Durante esta fase de Sitter:

$$a(t) = a(t_i)e^{H_I(t-t_i)}$$

$$a_f \equiv a(t_f) = a(t_i)e^{H_I(t_f-t_i)} = a(t_i)e^{H_I \Delta t} = a(t_i)e^N$$

El número N es lo que se conoce como el *número de e-folds* (veces que se multiplica por e):

$$\tilde{\Omega}_{tot}(t_i) - 1 = \frac{\kappa}{H_I^2 a_i^2} \sim 1$$

Partiendo de esta condición inicial, más natural, con esta fase de inflación conseguimos:

$$\tilde{\Omega}_{tot}(t_f) - 1 = \frac{\kappa}{H_I^2 a_f^2} \sim 1 = \underbrace{\left(\frac{\kappa}{H_I^2 a_i^2} \right)}_{\sim 1} \frac{a_i^2}{a_f^2} \sim e^{-2N}$$

Este mecanismo, al final de la expansión, nos proporciona nuestra condición “rara”, naturalmente, dependiendo únicamente del número N .

De esta manera, la inflación soluciona el problema de la planaridad.

5.2. Problema del horizonte

En cosmología hay varios horizontes, uno de los cuales ya hemos mencionado, el horizonte de partículas.

Ejercicio: Ver que $d_{hor}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$

Ejercicio: Hacer el cambio de variable al redshift, tal que: $d_{hor}(z) = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz}{H(z)}$

Horizonte de partícula comovimiento: Es el tamaño de la zona conectada causalmente cuando el redshift era z :

$$\hat{d}_{hor}(z) = \frac{a_0}{a(z)} d_{hor}(z) = \int_z^\infty \frac{dz}{H(z)}$$

Ejemplo: en la época del desacoplo radiación-materia, a redshift $z = 1100$, la zona causalmente conectada tenía un cierto tamaño. Debido a la expansión del Universo, esa zona actualmente tendrá un tamaño $\hat{d}_{hor}(z)$. Vamos a hacer el cálculo para este ejemplo:

$$d_{hor}(t_{des}) = a(t_{des}) \int_0^{t_{des}} \frac{dt}{a(t)} = a_{des} \eta_{des}$$

Ejercicio: Usando las fórmulas de la época del desacoplo, obtener:

$$d_{hor}(t_{des}) = \frac{3(1 + \sqrt{2})}{\sqrt{2}} \frac{(1 + z_{eq})}{(1 + z_{des})} \left[\sqrt{\frac{1 + z_{eq}}{1 + z_{des}} + 1} - 1 \right] t_{eq}$$

Introduciendo los valores en la ecuación, obtenemos:

$$d_{hor}(t_{des}) \simeq 250 \text{ Kpc}$$

Este era el tamaño del horizonte de partículas en ese momento. Actualmente esta zona ha sido expandida hasta:

$$\hat{d}_{hor}(t_{des}) = (1 + z_{des}) d_{hor}(t_{des}) \simeq 280 \text{ Mpc}$$

Esta superficie, si la “colocamos” en el fondo cósmico de microondas, a 14 Gpc, subtiende un ángulo

$$\Delta\alpha = \frac{\hat{d}_{hor}(z_{des})}{d_{LSS}} = \frac{280 \text{ Mpc}}{14 \text{ Gpc}} \simeq 1,1^\circ$$

Esperaríamos, por tanto, que en regiones de 1.1° habría homogeneidad de temperaturas, ya que estaban conectadas causalmente en ese momento, y en equilibrio térmico. Sin embargo, lo que es sorprendente es que se observa que en regiones mucho mayores esta homogeneidad existe, ya que todo el CMB tiene aproximadamente la misma temperatura.

5.2.1. Inflación como solución del problema del horizonte

Introduciendo la fase inflacionaria en el modelo, tenemos:

$$\hat{d}_{hor}(t_{des}) = a_0 \left[\underbrace{\int_0^{t_i} \frac{dt}{a_1(t)}}_I + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_{inf}(t)}}_{II} + \underbrace{\int_{t_f}^{t_{des}} \frac{dt}{a_2(t)}}_{III} \right]$$

Vamos estudiar estas tres contribuciones por separado:

- Primera contribución:

$$I = \frac{a_0}{a_i} a_i \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_1(t)} = \frac{a_0}{a_i} 2t_i = \frac{a_0}{a_f} \frac{a_f}{a_i} H_{inf}^{-1} = (1 + z_f) e^N H_{inf}^{-1}$$

Donde hemos usado el parámetro de un Universo con radiación $a(t) = t^{1/2}$.

- Segunda contribución (fase de Sitter):

Ejercicio: $II = (1 + z_f) e^N H_{inf}^{-1}$

Vemos por tanto que las dos primeras contribuciones son iguales.

- Tercera contribución:

$III \simeq 280$ Mpc (es el resultado del apartado anterior, previo a la introducción de inflación).

Lo que necesitamos ahora es que el ángulo subtendido por las dos primeras contribuciones complete los 360° , para garantizar la homogeneidad de todo el CMB:

$$\frac{2(1 + z_f) e^N H_{inf}^{-1}}{14\text{Gpc}} = 2\pi$$

Introduciendo los datos anteriores para por ejemplo la Gran Unificación, se puede explicar.

Ejercicio: Obtener el número de e-folds $N \simeq 62$

Este número de e-folds de hecho es el mismo que el necesario para “arreglar” la planaridad.

Ejercicio: Para un modelo de Einstein-de Sitter, calcular el radio de la esfera de Hubble en función de w y q .

Ejercicio: Para el mismo modelo, calcular la distancia al horizonte de partículas en función de w .

Capítulo 6

Anexo: Materia Oscura

Parte impartida por el profesor Jose Alberto Ruiz Cembranos.

6.1. Introducción

¿Qué es la materia oscura? La materia oscura es aquella materia solo observada por sus interacciones gravitatorias. No está incluida en el Modelo Estándar de partículas, pero se necesita para ajustar las observaciones dentro del Modelo Cosmológico Estándar Λ CDM.

Es importante observarla de manera no gravitacional, ya que existen modelos (por ejemplo los de gravedad modificada) fuera del Λ CDM que no necesitan de su existencia.

6.2. Evidencias de materia oscura

Ya desde los años 30 se llevan encontrando cada vez más evidencias la existencia de materia oscura en el Universo. Vamos a repasar las más notables:

- **Curvas de rotación:** Fritz Zwicky observó en 1933 un déficit de 98 % de masa en las galaxias observando las velocidades orbitales de estas en cúmulos. (Véase página 13)
- **Lentes gravitacionales:** Como consecuencia de la Relatividad General, la luz sigue las mismas geodésicas que el resto de los cuerpos, por tanto su trayectoria alrededor de cuerpos masivos se curva. Si estimamos la masa de una galaxia que provoca esta curvatura, nos damos cuenta de que es mucho mayor de la masa que observamos.
- **Bullet cluster:** El cúmulo de la bala (de ahí el nombre en inglés), consiste en dos cúmulos de galaxias tras colisionar. A esta escala, las estrellas son puntuales y traspasan sin problema, mientras que el gas sufrirá un proceso de colisión y se verá retrasado. La

materia oscura se supone que debería interaccionar nada o muy ligeramente, por tanto iría con las estrellas, por delante del gas.

La masa asociada al gas es mayor que la de las estrellas, por tanto ahí debería estar el centro de la materia visible, pero las lentes gravitacionales colocan este centro delante, con las estrellas, lo que se entiende que es por la descripción previamente mencionada.

Según la colaboración *Chandra*, esta es la prueba definitiva de la existencia de materia oscura, ya que las teorías de gravedad modificada difícilmente pueden explicarlo.

- **CMB:** A partir de los datos extraídos del fondo cósmico de microondas, se obtiene que habría $\Omega_b \simeq 0,0462$ (materia bariónica) y $\Omega_{cdm} \simeq 0,233$ (materia oscura), lo cual está acorde con los datos de formación de estructuras y de supernovas.
- **Supernovas IA:** Mediante la observación de supernovas podemos medir la aceleración del Universo. Esta depende principalmente de la abundancia de energía cosmológica y materia oscura, por tanto ajustando el valor del parámetro de deceleración:

$$-q = \Omega_\Lambda - \frac{\Omega_m}{2a^3}$$

Podemos ver que habría $\Omega_\Lambda \simeq 0,73$, $\Omega_m \simeq 0,27$ (donde Ω_m comprende materia bariónica y oscura), lo cual es consistente con los datos del CMB.

- **Formación de estructuras:** Actualmente el Universo no es homogéneo ni isótropo. Esto se explica a partir de perturbaciones de la métrica, que evolucionan desde pequeñas inhomogeneidades en el CMB (o antes) hasta las estructuras actuales (tiene sentido, ya que donde existía un contraste de densidad, con un poco más de la media, acumulará la materia a su alrededor cada vez más).

Sin embargo solo con la cantidad de materia observable no se explica, se necesita introducir la materia oscura para ello, y esta cantidad es consistente con $\Omega_m \simeq 0,3$, de nuevo coincidiendo con las anteriores predicciones.

6.3. Producción de materia oscura

La producción de materia oscura tiene lugar (es la hipótesis estándar) mediante un mecanismo de *freeze-out*. Vamos a estudiar este mecanismo, además de alternativas.

- **Freeze-out:** Suponemos que en un principio la materia oscura estaba en equilibrio térmico con el resto de partículas del Modelo Estándar, pero al enfriarse el Universo se desacoplan, al igual que las fuerzas fundamentales fuera de la “Gran Unificación”.

Para explicar las abundancias de materia oscura se necesitaría que la unificación con el Modelo Estándar fuera en la región entre 1 GeV - 1 TeV, que es el rango electrodébil. Debido a esto, se ha buscado en el CERN dentro de este sector electrodébil del Modelo Estándar, si resultado alguno, por tanto se están explorando mecanismos alternativos.

- **Freeze-in:** Asumimos que la materia oscura nunca ha estado en equilibrio térmico con ninguna partícula del Modelo Estándar, debido a que tiene un acoplamiento muy débil. Por esto que de ser así, sería muy difícil de conseguir esta materia ya que el CERN sería incapaz de producirla dada su interacción tan suprimida.

Otro problema que tendrán este y el resto de modelos (salvo el *freeze-out*) es que necesitan hacer suposiciones sobre el Universo primitivo.

- **Desintegración de otras partículas:** Podría darse por ejemplo la siguiente situación:

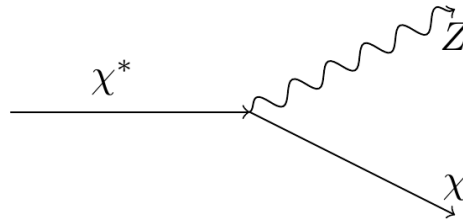


Figura 6.1: Desintegración en materia oscura

Donde χ^* sería una partícula inestable desacoplada, Z (por poner un ejemplo) sería una partícula conocida, y χ una partícula de materia oscura.

Esto necesitaría de nuevo poca interacción entre las partículas del Modelo Estándar, y la materia oscura.

- **Producción gravitacional:** La teoría cuántica de campos en espaciotiempos curvos implica que un espaciotiempo que varía temporalmente produce partículas. Haciendo un análisis detallado, se encuentra que para que sea eficiente el proceso, los cambios han de ser abruptos, o bien que tenga lugar durante el periodo de inflación.
- **Rupturas de simetría:** Asociado a procesos de ruptura de simetría (al igual que en el caso del Higgs) aparecen partículas no necesariamente elementales, llamadas solitones (como el protón en QCD). Así, la materia oscura podría ser una partícula compuesta, producto de una transición de fase por este mecanismo de ruptura.

Se ha estudiado como consecuencia de esto que la materia oscura sea “pseudobosones de Goldstone”, partículas asociadas a esta simetría rota.

- **Materia oscura asimétrica:** Hasta ahora hemos tenido en cuenta que las partículas de materia oscura son sus propias antipartículas, y se producen a la vez que se aniquilan. Si por el contrario, tenemos una asimetría entre partículas y antipartículas de materia oscura, se podría postular una “simetría global oculta”, asociada a un número bariónico oscuro. Con esto hay modelos que pretenden explicar a la vez la bariogénesis (la asimetría entre materia y antimateria ordinaria) y la producción de materia oscura. De esta forma, habría que hacer “versiones asimétricas” del *freeze-out*, *freeze-in*, ...

6.4. Candidatos a materia oscura

Vamos a dar unas ideas generales sobre los principales candidatos a materia oscura. Como el Modelo Estándar de partículas da cuenta del 4% del contenido del Universo, la Cosmología Estándar requiere de partículas fuera de este Modelo.

Estas partículas, aparte de ser masivas, pueden tener distintas propiedades dependiendo del modelo, por ejemplo:

- Térmica o no térmica
- Inestable o estable (si fuera inestable tendría que tener un periodo de vida mayor que la edad del Universo)
- Interactuante o no interactuante
- Fría o caliente

Las dos últimas opciones (fría e interactuante) están motivadas recientemente por el estudio de las estructuras a pequeña escala.

Todas estas posibilidades están acotadas por las restricciones observacionales.

- **Supersimetría:** Las divergencias de las teorías y las correcciones mejoran considerablemente con la introducción de la supersimetría, por eso es teóricamente tan atractiva. Induce una simetría entre fermiones y bosones, de forma que por ejemplo habría un electrón escalar, el “selectrón”, un fotón fermiónico, el “fotín”, etc. Como mínimo habría el doble de partículas en el Modelo Estándar Supersimétrico (de hecho, más).

La razón por la que no se observarían es que esa simetría estaría rota a bajas energías. Hay modelos de supersimetría con una simetría adicional, la “simetría R”, que fuerza que exista una partículas supersimétrica (la más ligera) estable, lo cual la hace un buen candidato a materia oscura.

Los principales candidatos dentro de la supersimetría son el neutralino y el gravitino.

- **Dimensiones adicionales:** Que haya tres dimensiones espaciales es un hecho observacional, ya que estarían compactificadas a bajas energías (el ejemplo típico es imaginar una manquera, que de lejos parece unidimensional, cuando realmente es bidimensional, es un cilindro). Con estas dimensiones extra aparecen nuevos grados de libertad, que en el caso del modelo “mínimo” introduce un nuevo parámetro.

Estudiando los modos de cada partícula en estas dimensiones, aparece lo que se conoce como la “torre de estados de Kaluza-Klein”. Esto es bastante análogo al modelo supersimétrico, con una simetría análoga a la simetría R, la simetría de traslación en la dimensión extra.

- **Axiones:** En QCD, hay un término $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a\mu\nu}$, con $\tilde{G}^{a\mu\nu} \propto \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\rho\sigma}^a$, que se encuentra físicamente, no como en el caso electromagnético (en el que, al ser una derivada total se desprecia en el lagrangiano), sin embargo este término viola la simetría CP.

La única solución que se ha propuesto es la introducción de una partícula, el axión, asociado a una simetría axial $U(1)$. Estas partículas son candidatas a materia oscura, y tendrían un acoplamiento muy débil al resto del Modelo Estándar, ya que desde hace años se han buscado pero no se han encontrado.

- **Masas de neutrinos:** La masa de los neutrinos (que ahora sabemos que no es nula), no puede ser introducida en el Modelo Estándar, sin la presencia de nuevas partículas, los neutrinos estériles, que son un candidato de materia oscura “templada”. Hay muchos autores que creen que esta materia está favorecida.
- **Modificación UV de la gravitación:** A altas energías la gravitación no es renormalizable, y no es unitaria (no conservan las probabilidades, se obtienen probabilidades mayores a la unidad). Las modificaciones introducen nuevos grados de libertad, que serían candidatos a materia oscura.

La mínima modificación es la “gravedad R2”, que introduce un nuevo parámetro, la partícula escalar-R2.

Hay más posibilidades, pero estos candidatos son los más favorables actualmente.

6.5. *Dark Searches:* Búsquedas de materia oscura

Actualmente hay cientos de experimentos a lo largo del planeta intentando encontrar rastros de materia oscura, en especial de los candidatos mencionados, acotando cada vez más sus propiedades. Vamos a mencionar los diferentes tipos de mediciones que se llevan a cabo:

- **Detección directa:** Observar cómo la materia oscura interacciona con un *target*, un objetivo, normalmente un núcleo. Se supone que se está viendo la interacción (mínima) de la materia oscura. Para ello se usan detectores de centelleo, de ionización, fonones, detectores de axiones, etc.

Muchos experimentos no han encontrado evidencias de materia oscura todavía, lo cual impone restricciones a por ejemplo su masa.

- **Detección indirecta:** Estas mediciones tratan de observar los efectos de la materia oscura. En general, comparten el problema de que no podemos saber a ciencia cierta que lo que se encuentra es materia oscura, o una “WIMP” (*weakly interactive massive particle*) diferente. No solo eso, si no que además hay muchos modelos de materia oscura, con diferentes predicciones.

- Producción de materia oscura en colisionadores: Tratan de encontrar materia oscura estudiando la energía faltante en una colisión. Tal y como mencionamos antes, esto solo indicaría la existencia de una WIMP, no obligatoriamente de materia oscura.
- Producción de materia oscura en “regeneración de fotones”: Estos experimentos consisten en intentos de detección de axiones, mediadores en el proceso conocido como la regeneración de fotones. Son experimentos muy complicados debido a la extremadamente baja probabilidad de que ocurra un evento. El esquema básico del funcionamiento sería:

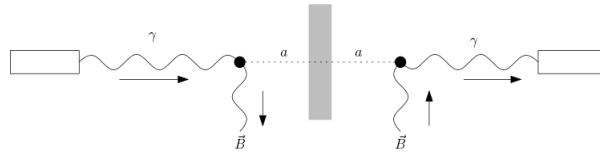


Figura 6.2: Funcionamiento de detectores de axiones

- Medidas cosmológicas: Los modelos de materia oscura pueden ajustarse a las medidas de, por ejemplo, el CMB. Pero esto podría deberse a otras causas, no estaríamos totalmente seguros.
- Rayos cósmicos: Las partículas de materia oscura podrían aniquilarse (en la mayoría de los modelos, la materia oscura es su propia antipartícula, puede aniquilarse en pares, que luego se pueden desintegrar, y llegan a la Tierra como fotones, antiprotones, neutrinos, etc) en partículas del Modelo Estándar, detectadas posteriormente en la Tierra.

Este método tiene un problema adicional: para estos cálculos es necesario realizar bastantes hipótesis.

6.6. Cálculo de abundancias de reliquias térmicas

Vamos a comenzar repasando unos conceptos de termodinámica necesarios para el desarrollo que sigue.

La función de partición es la siguiente, conocida gracias a la física estadística:

$$f(\vec{p}) = \frac{1}{e^{E(\vec{p}-\mu)/T} \pm 1} \begin{cases} + & \text{Fermiones} \\ - & \text{Bosones} \end{cases}$$

Densidad del número de partículas: $n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(\vec{p})$

Densidad de energía: $\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p f(\vec{p}) E(\vec{p})$

Para el caso en el que $|\mu| \ll T$, $m \ll T$, estamos en el límite relativista, en cosmología esto es lo que se denomina por “radiación”. Su densidad de número de partículas será por tanto:

$$n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2}{e^{p/T} \pm 1} dp \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{1}{\pi^2} \xi(3) g T^3 & \text{Fermiones} \\ \frac{1}{\pi^2} \xi(3) g T^3 & \text{Bosones} \end{cases}$$

donde ξ es la *función zeta de Riemann*, con $\xi(3) \simeq 1,2$.

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^3}{e^{p/T} \pm 1} dp \begin{cases} \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{Fermiones} \\ \frac{\pi^2}{30} g T^4 & \text{Bosones} \end{cases}$$

Si nos encontramos en el límite opuesto (no relativista), tenemos $T \ll m$, $T \ll m - \mu$:

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m\mu/T}, \quad \rho = n \left[m + \frac{3}{2} T \right]$$

Ahora que hemos repasado estos argumentos termodinámicos básicos, vamos a ver cómo se aplican en cosmología:

A partir de la ecuación de Friedmann, sabemos que $H^2 \propto \rho_{rad} \propto T^4 \Rightarrow H \propto T^2$. A medida que la expansión del Universo continua, hay partículas que pasan del límite relativista al no relativista como consecuencia de este enfriamiento, pasando de “radiación” a “polvo”:

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$$

con g_* el número de grados relativistas efectivos asociados a la densidad de energía. Este valor va a cambiar, disminuyendo con el paso del tiempo. Viene dado por:

$$g_* = \sum_{\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4$$

donde $T \equiv T_\gamma$ (temperatura de los fotones).

La constante de Hubble será (con la aproximación de $g_* \simeq cte$), por tanto:

$$H = 1,66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{m_{Pl}} \Rightarrow t = 0,301 g_*^{1/2} \frac{m_{Pl}}{T^2}$$

siendo la masa de Planck $m_{Pl}^2 = G_N^{-1}$ (G_N es la constante de gravitación universal, newtoniana).

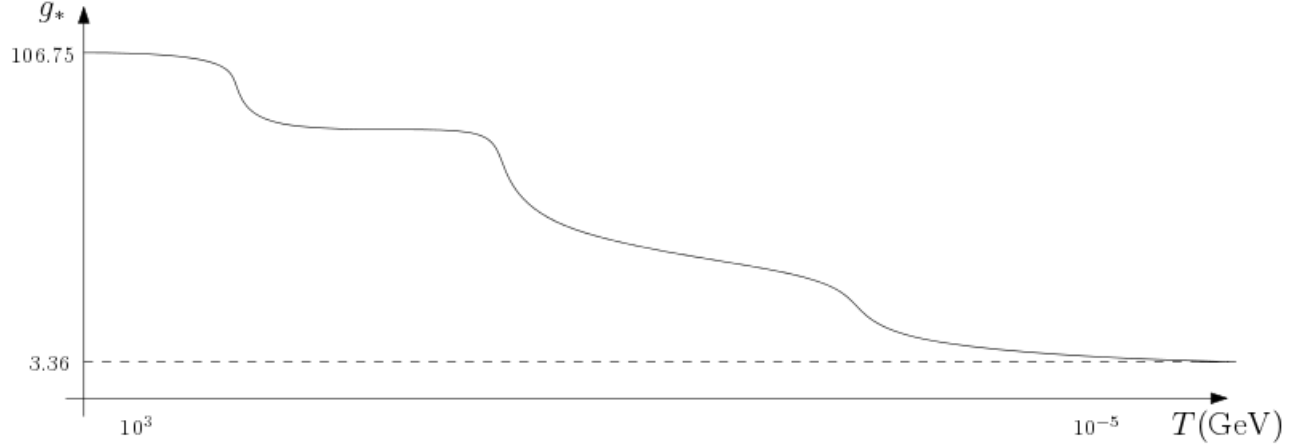


Figura 6.3: Grados de libertad efectivos asociados a la densidad de energía.

Si sumamos los grados de libertad efectivos según el Modelo Estándar de partículas a muy alta temperatura, tenemos aproximadamente 106,75.

¿De dónde sale el 3,36? A $T \simeq 1$ MeV, los fermiones se desacoplan, quedando los fotones con temperatura aumentada en el baño térmico, contribuyendo a la entropía.

Vamos a definir análogamente a g_* la cantidad g_{*s} , los grados de libertad efectivos que contribuyen a la entropía:

$$g_{*s} = \sum_{\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3$$

Para los fotones del baño térmico:

$$S \propto g_{*s} a^3 T^3$$

donde a es el factor de escala. Para el caso de $T \ll m_e \rightarrow g_{*s} = 2$, pero cuando la temperatura es mayor que la masa del electrón, $T > m_e \rightarrow g_{*s} = 2 + 4 \times \frac{7}{8} = \frac{11}{2}$. Debido a este paso de los electrones de ser relativistas a no serlo, aumentan su temperatura en la transición:

$$T_\gamma \simeq \left(\frac{11}{2} \right)^{1/3} T_\nu$$

Actualmente, los grados de libertad asociados a la energía son

$$g_*^0 = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \simeq 3,36$$

Los grados de libertad de energía y de entropía serían iguales si hubiera un único baño térmico, si al contrario, hay más de uno serían distintos (ligeramente):

$$g_{*s}^0 = 2 + \frac{7}{8} \times 2 \times 3 \times \left(\frac{4}{11} \right) \simeq 3,91$$

6.7. Fondo cósmico de neutrinos

La ecuación de Boltzmann es:

$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = -\langle\sigma_{Av}\rangle(n^2 - n_{eq}^2)$$

Esta ecuación la podemos escribir como:

$$\dot{n} + 3Hn = s\dot{Y}$$

donde s es la densidad de entropía y $Y = \frac{n}{s}$. En lugar del tiempo usaremos la variable $x = \frac{m}{T}$. Usando la fórmula del apartado anterior:

$$t \simeq 0,301g_*^{-1/2}\frac{m_{Pl}}{T^2} \simeq 0,301g_*^{-1/2}\frac{m_{Pl}}{m^2}x^2$$

De este modo, sustituyendo en la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x\langle\sigma_{Av}\rangle}{H}(Y^2 - Y_{eq}^2)$$

Va a haber un valor x_f tal que si $x < x_f$ las partículas estarán “congeladas” (con Y constante).

Este valor $Y \simeq cte$ será: $Y_0 \equiv Y(x = x_0) \simeq Y(x \simeq x_f) \simeq Y_{eq}(x \simeq x_f) = 0,278\frac{g}{g_{*s}(x_f)}$.

Deshaciendo el cambio de variable $n = sY$, e introduciendo el valor actual de densidad de entropía $s_0 = 2970 \text{ cm}^3$, obtenemos una densidad de número de partículas actual de:

$$n_0 = s_0Y_0 = 825\frac{g}{g_{*s}(x_f)} \quad (\text{cm}^{-3})$$

Como sabemos, $\rho^0 = mn_0$, y $\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}$:

$$\Rightarrow \Omega h^2 = 7,85 \cdot 10^{-2} \left(\frac{g}{g_{*s}(x_f)} \right) \left(\frac{\text{m}}{\text{1eV}} \right)$$

Introduciendo los valores para neutrinos: $g_{*s} = 10,75(T \sim 1\text{MeV})$ y $g = 2 \times \frac{3}{4} = 1,5$ se obtiene un valor $\Omega_{\nu\bar{\nu}}h^2 = \frac{m_\nu}{91,5\text{eV}}$.

Para que los neutrinos dieran cuenta de la materia oscura observada, se intentó ajustar esta masa, de alrededor de $m_\nu \simeq 20 \text{ eV}$.

Capítulo 7

Ejercicios resueltos

Nota: los ejercicios con # son importantes, pero no sugeridos por el profesor.

7.1. Conceptos Fundamentales

1: Comprobar que la densidad crítica equivale a 6 protones/m³.

La densidad crítica del Universo es $\rho_{crit} = 0,94 \cdot 10^{-29}$ g/cm³. La masa de un protón es $m_p = 1,672 \cdot 10^{-24}$ g=.

$$\frac{\rho_{crit}}{m_p} = 5,622 \approx 6 \quad \text{protones/m}^3$$

7.2. Principio Cosmológico

2: Comprobar que el cambio $\vec{x}' = \vec{x}$, $t' = t + f(\vec{x})$ transforma la métrica en coordenadas comovimiento de la siguiente manera: $g'_{00} = g_{00} = -1$, $g'_{0i} = g_{0i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Sabemos que las componentes de la métrica se transforman de la siguiente forma :

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}$$

Comenzamos con g'_{00} :

$$g'_{00} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} g_{\alpha\beta} = \delta_0^\alpha \delta_0^\beta g_{\alpha\beta} = g_{00} = -1$$

Ahora seguimos con $g'_{0i} = g'_{i0}$:

$$g'_{0i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^i} g_{\alpha\beta} = \delta_0^\alpha \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} g_{\alpha 0} + \delta_0^\alpha \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} g_{\alpha j} = -\frac{\partial f}{\partial x^i} g_{00} + \delta_i^j g_{0j} = \frac{\partial f}{\partial x^i} + g_{0i}$$

3: Siendo ξ vector de Killing, con $\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu = R^\rho_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho$, y usando la propiedad cíclica del tensor de Riemann, obtener $\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda = 0$.

De las 6 ecuaciones que intervienen en la propiedad cíclica del Riemann $R^\rho_{[\mu\nu\lambda]} = 0$, vamos a escribir las 3 permutaciones pares del tensor (también podríamos escoger las impares), ya que las 3 restantes se puede ver que se pueden escribir en términos de las 3 primeras:

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu &= R^\rho_{\mu\nu\lambda} \xi_\rho \\ \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda &= R^\rho_{\lambda\mu\nu} \xi_\rho \\ \nabla_\mu \nabla_\lambda \xi_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\nu &= R^\rho_{\nu\lambda\mu} \xi_\rho\end{aligned}$$

Con la propiedad cíclica, al sumarlas, y utilizar la propiedad de los Killings $\nabla_\mu \xi_\nu = -\nabla_\nu \xi_\mu$:

$$\begin{aligned}0 &= \nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu + \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\lambda - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\lambda \xi_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= \nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda + \nabla_\nu \nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\mu \nabla_\lambda \xi_\nu - \nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= \nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \nabla_\mu \xi_\nu \\ &= 2(\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda)\end{aligned}$$

Por tanto, queda demostrado $\nabla_\lambda \nabla_\nu \xi_\mu - \nabla_\nu \nabla_\lambda \xi_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu \xi_\lambda = 0$.

4: Comprobar para un espacio máximamente simétrico $\gamma^{ij} = (\delta^{ij} - x^i x^j)$ Sabemos que la métrica de un espacio máximamente simétrico puede escribirse como:

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - r^2}$$

Vamos a probar una métrica inversa de la forma:

$$\gamma^{ij} = \delta^{ij} + A x^i x^j$$

Y calcularemos A con la propiedad de la métrica $\delta_i^k = \gamma_{ij} \gamma^{jk}$:

$$\begin{aligned}\delta_i^k &= \gamma_{ij} \gamma^{jk} = \left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - r^2} \right) (\delta^{jk} + A x^j x^k) \\ &= \delta_{ij} \delta^{jk} + A x^j x^k \delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{1 - r^2} \delta^{jk} + A \frac{x_i x_j}{1 - r^2} x^j x^k \\ &= \delta_j^k + A x_i x^k + \frac{x_i x^k}{1 - r^2} + A r^2 \frac{x_i x^k}{1 - r^2} \\ &= \delta_j^k + A x_i x^k \left[1 + \frac{r^2}{1 - r^2} \right] + \frac{x_i x^k}{1 - r^2} \\ &= \delta_j^k + A \frac{x_i x^k}{1 - r^2} + \frac{x_i x^k}{1 - r^2} \Rightarrow A = -1\end{aligned}$$

5: Para un espacio máximamente simétrico, comprobar que la conexión espacial tiene la siguiente forma: $\Gamma^i_{jk} = k \frac{1}{a^2} x^i g_{jk}$.

Para comprobar esto, vamos a partir de las expresiones de la métrica de un espacio máximamente simétrico (sin el factor de escala, este lo introduciremos luego):

$$\gamma_{jk} = \delta_{jk} + \frac{x_j x_k}{1 - r^2}, \quad \gamma^{i\lambda} = \delta^{i\lambda} - x^i x^\lambda$$

La derivada respecto a la coordenada x^λ de $r^2 = x^\mu x_\mu$ será $\partial_\lambda r^2 = 2x_\lambda$. La fórmula de los símbolos de Christoffel (conexión métrica) es:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \gamma^{i\lambda} [\partial_j \gamma_{k\lambda} + \partial_k \gamma_{j\lambda} - \partial_\lambda \gamma_{jk}]$$

Con esto, ya podemos empezar a calcular. Para simplificar los cálculos, haremos una de las tres derivadas de la métrica, las otras dos serán idénticas salvo intercambio de índices:

$$\partial_\lambda \gamma_{jk} = \frac{\partial_\lambda (x_j x_k)}{1 - r^2} + \frac{x_j x_k}{(1 - r^2)^2} \partial_\lambda r^2 = \frac{\delta_{\lambda j} x_k + x_j \delta_{k\lambda}}{1 - r^2} + 2 \frac{x_\lambda x_j x_k}{(1 - r^2)^2}$$

Introduciendo esto en la fórmula de los símbolos de Christoffel, y teniendo en cuenta los intercambios de índices previamente mencionados, obtenemos:

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2} \frac{\gamma^{i\lambda}}{1 - r^2} \left[x_\lambda \delta_{kj} + x_\lambda \delta_{jk} + 2 \frac{x_\lambda x_j x_k}{1 - r^2} \right] = \frac{1}{2} \frac{(\delta^{i\lambda} - x^i x^\lambda)}{1 - r^2} \left[2x_\lambda \delta_{kj} + 2 \frac{x_\lambda x_j x_k}{1 - r^2} \right] \\ &= \frac{1}{1 - r^2} \left[x^i \delta_{jk} + \frac{x^i x_j x_k}{1 - r^2} - x^i r^2 \delta_{jk} - \frac{x^i r^2 x_j x_k}{1 - r^2} \right] = x^i \delta_{jk} + \frac{x^i x_j x_k}{1 - r^2} = x^i \gamma_{jk} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que en esta asignatura las secciones espaciales máximamente simétricas llevan un factor de escala, de forma que $g_{jk} = a(t)^2 \gamma_{jk}$, el resultado anterior será:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{x^i}{a^2} g_{jk}$$

Este es un caso particular, el de curvatura $\kappa > 0$. Para un caso genérico el procedimiento es análogo, o bien haciendo los tres casos por separado ($k = -1, 0, 1$), o bien partiendo de la métrica general

$$\gamma_{jk} = \delta_{jk} + \frac{x_j x_k}{1 - kr^2}, \quad \gamma^{i\lambda} = \delta^{i\lambda} - \frac{x^i x^\lambda}{1 + r^2 - kr^2}$$

Donde el factor que aparece en la métrica inversa viene de exigir que la métrica por su inversa es la delta de Kronecker.

7.3. Cinemática Cosmológica

6: Obtener $t_0 - t = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 + \dots \right]$.

Sabemos que el redshift se escribe a segundo orden en $(t_0 - t)$ como:

$$z = H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0^2(t_0 - t)^2 + \dots$$

Vamos a despejar $t_0 - t$ del primer sumando:

$$t_0 - t = H_0^{-1}z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0(t_0 - t)^2 + \dots$$

Usamos esta relación de recurrencia, sustituyendo esta expresión en sí misma, y despreciando las contribuciones a órdenes superiores a 2:

$$\begin{aligned} t_0 - t &= H_0^{-1}z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0 \left[H_0^{-1}z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0(t_0 - t)^2 + \dots \right]^2 + \dots \\ &\approx H_0^{-1}z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) H_0(H_0^{-1}z)^2 + \dots \\ &= H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{1}{2}q_0 \right) z^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

7: Obtener $\mu = 25 - 5 \log_{10} H_0 \text{ (km/s Mpc)} + 5 \log_{10} cz \text{ (km/s)} + 1,086(1 - q_0)z + \dots$.

Para este ejercicio vamos a utilizar las propiedades de los logaritmos, aplicadas al módulo de distancia:

$$5 \log_{10} \left[\frac{\left(\frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1 - q_0}{2} z^2 + \dots \right) \right)}{10 \text{ pc}} \right]$$

Pero, ya que el argumento de un logaritmo siempre ha de ser una cantidad adimensional, los 10 parsecs dividiendo hemos de convertirlos a Megaparsecs, para obtener las unidades del enunciado:

$$\begin{aligned} \mu &= 5 \log_{10} \left[\frac{1}{H_0} \left(z + \frac{1 - q_0}{2} z^2 + \dots \right) \right] - 5 \log_{10}(10^{-5} \text{ Mpc}) \\ &= 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} \left[z \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z \right) + \dots \right] \\ &= 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} z + 5 \log_{10} \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z + \dots \right) \end{aligned}$$

Para el siguiente paso necesitamos convertir el logaritmo decimal a logaritmo neperiano, para ello usamos:

$$\log_a b = x \Rightarrow x = \frac{\log a}{\log b}$$

En nuestro caso:

$$\mu = 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} z + \frac{5}{\ln 10} \ln \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z + \dots \right)$$

Ahora podemos usar la expansión en serie del logaritmo, suponiendo $\left| \frac{1 - q_0}{2} z \right| < 1$:

$$\mu = 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} z + 2,17147 \left(\frac{1 - q_0}{2} z + \dots \right) = 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10} z + 1,0857(1 - q_0)z$$

8: Ejercicio: Variación temporal del redshift. Llegar al siguiente resultado

$$H = (1 + z)H_0 - \frac{dz}{dt_0} \quad \left(\text{Pista: } 1 + z = \frac{a_0}{a} \right)$$

La pista proporcionada la podemos relacionar con:

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \frac{dt_0}{dt}$$

Derivamos esta expresión respecto a t_0 :

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{da_0}{dt_0} \frac{1}{a} + \left(\frac{d}{dt_0} \frac{1}{a} \right) a_0 = \frac{\dot{a}_0}{a} - \frac{a_0}{a^2} \frac{da}{dt_0} = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \frac{a_0}{a} - \frac{a_0}{a^2} \frac{dt}{dt_0} \frac{da}{dt}$$

Usando las relaciones conocidas entre el factor de escala y el redshift (la pista), y entre el factor de escala y la constante de Hubble:

$$\frac{dz}{dt_0} = H_0(1 + z) - \frac{a_0}{a} \frac{dt}{dt_0} \frac{\dot{a}}{a} = H_0(1 + z) - \frac{1}{(1 + z)} H$$

Por tanto:

$$H = H_0(1 + z) - \frac{dz}{dt_0}$$

7.4. Dinámica Cosmológica

9: Comprobar para un espaciotiempo máximamente simétrico en las coordenadas espaciales $\Gamma^i_{00} = 0$, $\Gamma^0_{i0} = 0$.

La métrica de dicho espaciotiempo es:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

con g_{ij} la métrica de un espacio máximamente simétrico, y por tanto diagonal. Conocemos la fórmula general de los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho} (\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\mu\lambda} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu})$$

Caso por caso:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{00} &= \frac{1}{2}g^{i\lambda} (\partial_0g_{\lambda 0} + \partial_0g_{\lambda 0} - \partial_{\lambda}g_{00}) = g^{ii}\partial_0g_{i0} = 0 \\ \Gamma^0_{i0} &= \frac{1}{2}g^{0\lambda} (\partial_i g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{i\lambda} - \partial_{\lambda}g_{i0}) = \frac{1}{2}g^{00} (\partial_i g_{00} + \partial_0 g_{i0}) = 0\end{aligned}$$

10: Comprobar para un espaciotiempo máximamente simétrico en las coordenadas espaciales $\Gamma^i_{j0} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j$, y comprobar que $\Gamma^i_{jk} = \hat{\Gamma}^i_{jk}$, siendo esto último la conexión asociada a las secciones espaciales.

Procedemos igual que en el ejercicio anterior:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{j0} &= \frac{1}{2}g^{i\lambda} (\partial_j g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{j\lambda} - \partial_{\lambda}g_{j0}) = \frac{1}{2}g^{ik} (\partial_j g_{k0} + \partial_0 g_{kj}) = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 g_{kj} \\ &= \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 [a^2(t)\gamma_{kj}] = a\dot{a}g^{ik}\gamma_{jk} = \frac{\dot{a}}{a}g^{ik}g_{kj} = \frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j\end{aligned}$$

La conexión espacial $\hat{\Gamma}^i_{jk}$ es de la forma:

$$\hat{\Gamma}^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk})$$

Por tanto, si comenzamos a calcular la conexión Γ^i_{jk} , y teniendo en cuenta que nuestra métrica es diagonal, llegamos a:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}g^{i\rho} (\partial_j g_{\rho k} + \partial_k g_{\rho j} - \partial_{\rho}g_{jk}) = \frac{1}{2}g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) = \hat{\Gamma}^i_{jk}$$

11: Calcular para un espaciotiempo máximamente simétrico en las coordenadas espaciales $R_{0i} = 0$ (tiene sentido, ya que de lo contrario habría una dirección privilegiada, contradiciendo la isotropía), y $R_{ij} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2}g_{ij} + \hat{R}_{ij}$, siendo \hat{R}_{ij} el tensor de Ricci asociado a la métrica espacial, e igual a $\hat{R}_{ij} = (D-1)\frac{\kappa}{a^2}g_{ij} = 2\frac{\kappa}{a^2}g_{ij}$.

La expresión general para el tensor de Ricci a partir de los símbolos de Christoffel es la siguiente:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu}$$

En nuestro caso:

$$\begin{aligned}R_{0i} &= R_{i0} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{0i} - \partial_0\Gamma^{\lambda}_{i\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{i0}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{i\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha 0} \\ &= \cancel{\partial_j\Gamma^j_{0i}} - \cancel{\partial_0\Gamma^j_{ij}} + \Gamma^j_{i0}\Gamma^k_{jk} - \Gamma^j_{ik}\Gamma^k_{j0} \\ &= \frac{\dot{a}}{a}\delta^j_i\Gamma^k_{jk} - \Gamma^j_{ik}\frac{\dot{a}}{a}\delta^k_j = \frac{\dot{a}}{a}(\Gamma^k_{ik} - \Gamma^j_{ij}) = 0\end{aligned}$$

Antes de continuar con R_{ij} , vamos a poner la expresión del tensor de Ricci espacial \hat{R}_{ij} :

$$\hat{R}_{ij} = \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik} + \Gamma^k_{ij} \Gamma^l_{kl} - \Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj}$$

Teniendo esto en mente, desarrollamos R_{ij} :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_j \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\alpha_{ij} \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda} - \Gamma^\alpha_{i\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha j} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} - \partial_j \Gamma^k_{ik} + \Gamma^0_{ij} \Gamma^k_{0k} + \Gamma^k_{ij} \Gamma^l_{kl} - \Gamma^0_{ik} \Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0} \Gamma^0_{kj} - \Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj} \\ &= \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij} \Gamma^k_{0k} - \Gamma^0_{ik} \Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0} \Gamma^0_{kj} + \hat{R}_{ij} \end{aligned}$$

Desarrollando la parte que no es púramente espacial:

$$\begin{aligned} R_{ij} - \hat{R}_{ij} &= \partial_0 \left(\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} \right) + \frac{\dot{a}}{a} g_{ij} 3 \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}}{a} g_{ik} \frac{\dot{a}}{a} \delta^k_j - \frac{\dot{a}}{a} \delta^k_i \frac{\dot{a}}{a} g_{kj} \\ &= \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} g_{ij} + \frac{\dot{a}}{a} 2a \dot{\gamma}_{ij} + 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} \\ &= \frac{\ddot{a}a}{a^2} g_{ij} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2} g_{ij} \end{aligned}$$

Ahora nos quedaría el tensor de Ricci de la métrica espacial. Sabemos que para un espacio máximamente simétrico, el Ricci viene dado por:

$$\hat{R}_{ij} = \frac{1}{D} \gamma_{ij} R = \kappa \frac{D(D-1)}{D} \gamma_{ij} = \kappa(D-1) \frac{g_{ij}}{a^2}$$

Que en 3 dimensiones espaciales máximamente simétricas es $\hat{R}_{ij} = 2 \frac{\kappa}{a^2} g_{ij}$

12: Calcular el escalar de curvatura: $R = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa)$.

El escalar de curvatura en función de los tensores de Ricci se expresa de la siguiente manera:

$$R = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij}$$

Aplicándolo a nuestro caso nos queda:

$$\begin{aligned} R &= 3 \frac{\ddot{a}}{a} + g^{ij} g_{ij} \left(\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\kappa}{a^2} \right) = 3 \frac{\ddot{a}}{a} + 3 \left(\frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\kappa}{a^2} \right) \\ &= 3 \left(2 \frac{\ddot{a}a + \dot{a}^2}{a^2} + 2 \frac{\kappa}{a^2} \right) = \frac{6}{a^2} (\ddot{a}a + \dot{a}^2 + \kappa) \end{aligned}$$

13: Calcular $\nabla_\nu T^\nu_i \equiv 0$ (no da información).

El tensor energía-impulso tiene la siguiente forma, para un fluido perfecto:

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (p + \rho) u_\mu u_\nu$$

Por tanto al calcular $\nabla_\nu T_i^\nu$, teniendo en cuenta que $u^\mu = (1, \vec{0})$, y que la presión es constante a lo largo de las direcciones espaciales, tenemos:

$$\begin{aligned}\nabla_\nu T_i^\nu &= \partial_\nu T_i^\nu + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} T_i^\lambda - \Gamma^\lambda_{\nu i} T_\lambda^\nu \\ &= \partial_\nu (p\delta_i^\nu) + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} (p\delta_i^\nu + (p+\rho)u_i u^\nu) - \Gamma^\lambda_{\nu i} (p\delta_\lambda^\nu + (p+\rho)u_\lambda u^\nu) \\ &= \cancel{\Gamma^\nu_{\lambda\nu} p\delta_i^\nu} - \cancel{\Gamma^\lambda_{\nu i} p\delta_\lambda^\nu} + \Gamma^\lambda_{\nu i} (p+\rho)u_\lambda u^\nu = \Gamma^0_{0i} (p+\rho)u_0 u^0 = 0\end{aligned}$$

#: a) Demostrar que la ecuación de Friedmann y la de conservación implican la de la aceleración. b) Demostrar que la ecuación de Friedmann y la de aceleración implican la de la conservación.

a) Partimos de la ecuación de Friedmann:

$$\dot{a}^2 + \kappa = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2$$

Derivándola, obtenemos:

$$2\dot{a}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\rho}a^2 + 2\rho a\dot{a}) \Rightarrow \ddot{a} = \frac{4\pi G}{3} a \left(\frac{\dot{\rho}}{\dot{a}} a + 2\rho \right)$$

Este resultado mantenemos por el momento, incluso lo usaremos en el siguiente apartado. Ahora, vamos con la ecuación de conservación:

$$\dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\dot{a}} = -\frac{3}{a}(\rho + p)$$

Sustituyendo este resultado en la fórmula anterior:

$$\ddot{a} = \frac{4\pi G}{3} a(-3\rho - 3p + 2\rho) = -\frac{4\pi G}{3} a(\rho + 3p)$$

Y esto ya es la ecuación para la aceleración.

b) En este caso, partimos del resultado obtenido en el apartado anterior, de la ecuación de Friedmann derivada, y le restamos la ecuación para la aceleración:

$$\begin{aligned}\ddot{a} - \ddot{a} &= \frac{4\pi G}{3} a \left(\frac{\dot{\rho}}{\dot{a}} a + 2\rho \right) + \frac{4\pi G}{3} a(\rho + 3p) = 0 \\ \Rightarrow \frac{\dot{\rho}}{\dot{a}} a + 2\rho + \rho + 3p &= 0 \Rightarrow \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0\end{aligned}$$

Y esta es ya la ecuación de conservación

14: Ver que podemos escribir el parámetro de deceleración como $q = \frac{1+3w}{2}\tilde{\Omega}_w$.

La fórmula del parámetro de deceleración en función de las derivadas del factor de escala es:

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}$$

Introduciendo la ecuación para la aceleración en la fórmula, obtenemos:

$$q(t) = \frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)\frac{a^2}{\dot{a}^2}$$

Identificando ahora el parámetro de Hubble $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ e introduciendo la ecuación de estado $p = w\rho$, nos queda:

$$q(t) = \frac{4\pi G}{3}\rho(1+3w)\frac{1}{H^2}$$

También conocemos la siguiente relación:

$$H^2\tilde{\Omega} = \frac{8\pi G}{3}\rho$$

Que introducida en la ecuación, queda:

$$q(t) = \frac{H^2\tilde{\Omega}}{2}(1+3w)\frac{1}{H^2} = \frac{1+3w}{2}\tilde{\Omega}_w$$

15: Resolver Einstein-de Sitter en tiempo conforme.

Los modelos de Einstein-de Sitter son aquellos con $w > -\frac{1}{3}$, es decir, materia ordinaria. Vamos a comenzar su resolución pasando la ecuación de Friedmann a tiempo conforme, para ello hemos de cambiar la derivada temporal del factor de escala:

$$\dot{a} = \frac{da}{dt} = \frac{d\eta}{dt} \frac{da}{d\eta} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\eta} = \frac{a'}{a}$$

Introduciendo este cambio en la ecuación de Friedmann:

$$a' = \frac{8\pi G}{3}\rho a^3$$

Sabemos, por la ecuación de conservación y la ecuación de estado, que $\rho a^{3+3w} = \rho_0 a_0^{3+3w} = b^2$, por tanto si usamos este resultado:

$$a' = \frac{8\pi G}{3}b^2 a^{-3w} \rightarrow \int da a^{3w} = \frac{8\pi G}{3}b^2 \int d\eta \rightarrow \frac{a^{1+3w}}{1+3w} = \frac{8\pi G}{3}b^2\eta$$

Dividiendo esto entre su valor en t_0 , se cancelan las constantes, y por tanto:

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^{1+3w} = \frac{\eta}{\eta_0} \rightarrow \begin{cases} \eta = \eta_0(1+z)^{-(1+3w)} \\ a = a_0 \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{-\frac{1}{1+3w}} \end{cases}$$

16: Desarrollar a segundo orden la raíz, para comprobar que va como $t^{1/2}$.

17: Ver que esto interpola el comportamiento de de Sitter a tiempo pequeño ($\sim x$) y a tiempo largo ($\sim e^{\sqrt{\Lambda}H_0 t}$).

7.5. Problemas del Modelo Cosmológico Estándar

18: Ver que $d_{hor}(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$.

La distancia se define como $d = a\chi$. La distancia al horizonte de partículas es la distancia máxima desde la que ha llegado la luz, y la luz cumple $d\chi = d\eta$, por tanto:

$$d_{hor}(t) = a(t)\eta(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$$

19: Hacer el cambio de variable al redshift, tal que: $d_{hor}(z) = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz}{H(z)}$.

Vamos a operar con el interior de la integral del ejercicio anterior:

$$\frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a} \frac{dt}{da} da = \frac{1}{a_0} \frac{a}{a} \frac{1}{\dot{a}} da = \frac{1+z}{a_0 H a} da = \frac{(1+z)^2}{a_0^2 H} da$$

A partir de la relación entre el factor de escala y el redshift, obtenemos:

$$da = -\frac{a_0}{(1+z)^2} dz$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dz}{a_0 H}$$

Volviendo a la integral del ejercicio anterior:

$$d_{hor}(z) = -\frac{a}{a_0} \int_\infty^z \frac{dz}{H(z)} = \frac{1}{1+z} \int_z^\infty \frac{dz}{H(z)}$$

20: Usando las fórmulas de la época del desacoplo, obtener:

$$d_{hor}(t_{des}) = \frac{3(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \frac{(1+z_{eq})}{(1+z_{des})} \left[\sqrt{\frac{1+z_{eq}}{1+z_{des}} + 1} - 1 \right] t_{eq}$$

Las fórmulas que necesitaremos serán las de la igualdad entre materia y radiación (equivalencia), ya que el desacoplo se encuentra cerca de esa época. La distancia al horizonte

de partículas se puede expresar (como vimos en el capítulo 5) como: $d_{hor}(t_{des}) = a_{des}\eta_{des}$. Sustituimos en esta expresión el tiempo conforme del periodo de equivalencia:

$$d_{hor}(t_{des}) = 2\sqrt{2}a_{des}H_{eq}^{-1}a_{eq}^{-1} \left(\sqrt{\frac{a_{des}}{a_{eq}} + 1} - 1 \right) = 2\sqrt{2}\frac{a_{des}}{a_0}H_{eq}^{-1}\frac{a_0}{a_{eq}} \left(\sqrt{\frac{a_{des}}{a_0}\frac{a_0}{a_{eq}} + 1} - 1 \right)$$

Cambiando al redshift tanto de la equivalencia como del desacoplo:

$$d_{hor}(t_{des}) = 2\sqrt{2}\frac{(1+z_{eq})}{(1+z_{des})}H_{eq}^{-1} \left(\sqrt{\frac{(1+z_{eq})}{(1+z_{des})} + 1} - 1 \right)$$

Ahora solo nos falta operar $2\sqrt{2}H_{eq}^{-1}$ hasta llegar a lo que buscamos. Para ello usamos otra fórmula de la equivalencia, la que relaciona el tiempo de la equivalencia con la constante de Hubble en la equivalencia:

$$\begin{aligned} t_{eq} &= \frac{4}{3}(\sqrt{2}-1)H_{eq}^{-1} \Rightarrow 2\sqrt{2}H_{eq}^{-1} = \frac{3\sqrt{2}t_{eq}}{2(\sqrt{2}-1)} \\ &\rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)} \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)} = \frac{3(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

21: Ver que la contribución del a fase de de Sitter es $\Pi = (1+z_f)e^N H_{inf}^{-1}$

22: Obtener el número de e-folds $N \simeq 62$

23: Para un modelo de Einstein-de Sitter, calcular el radio de la esfera de Hubble en función de w y q .

24: Para el mismo modelo, calcular la distancia al horizonte de partículas en función de w .